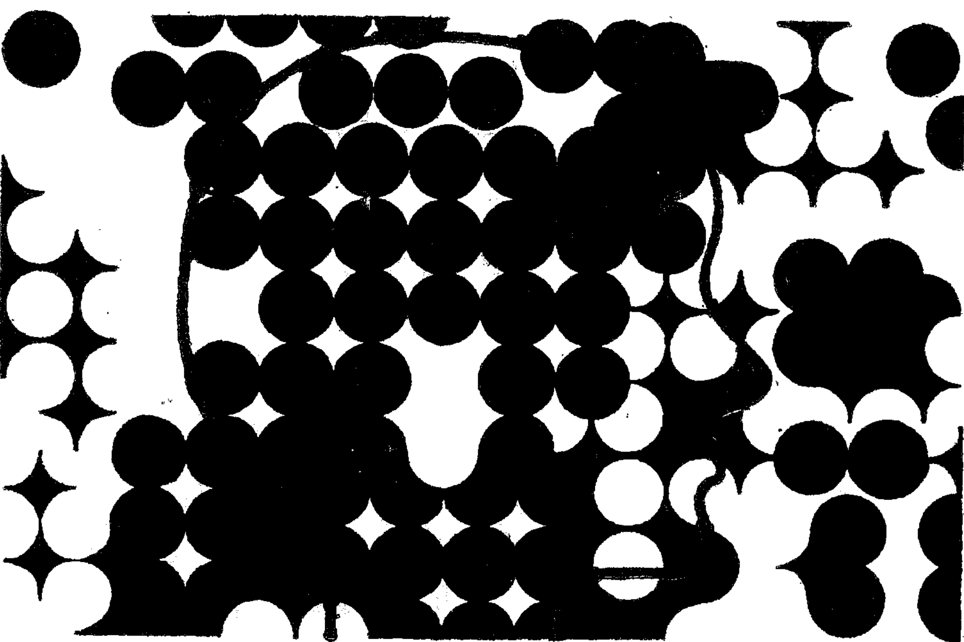
NDRU SURDU

ELEMENTE DE LOGICĂ INTUIȚIONISTĂ



ALEXANDRU SURDU

ELEMENTE DE LOGICĂ INTUIȚIONISTĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
București, 1976

CUPRINS

PREFAȚĂ

Neointuiționismul, al cărui inițiator a fost matematicianul și filozoful olandez **L.E.J.** *Brouwer, este un curent filozofic cu puternice influențe în gîndirea teoretică contemporană. Rezultatele obținute de către intuiționiști în matematica modernă, cît și poziția lor originală în fundamentele matematicilor, i-au făcut cunoscuți, încă de la începutul secolului, în lumea științifică. Ce-i drept, reacția față de acest curent nu a fost întotdeauna pozitivă. Cauza principală a acestei atitudini o constituie faptul că neointuiționismul este un curent filozofic de factură* tradițională, *în care se fac auzite ecouri ale principalelor tendințe din filozofia modernă : empirismul englez, raționalismul francez și dialectica germană. Ultimele, aplicate în mod consecvent la aspectele fundamentale ale științelor, ale culturii și ale vieții social-politice, i-au determinat pe intuiționiștii autentici să adopte o poziție fățiș antineopozitivistă.*

Din această cauză, neointuiționismul a pierdut mult din atenția care i se cuvenea, atît din partea savanților, cît și din partea filozofilor occidentali (în filozofia marxistă neointuiționismul este practic necunoscut). Pentru primii, după cum observă P. Lorenzen, nu prezintă nici o dificultate înțelegerea tezelor simple ale logiciștilor și ale formaliștilor, pe cînd intuiționismul dimpotrivă este imposibil de înțeles fără o temeinică pregătire filozofică [1]. *Pentru un cititor nefamiliarizat cu astfel de cunoștințe, după cum remarcă și Alfred Tarski, argumentele sînt deosebit de complicate iar unele distincții sînt de-a dreptul de neînțeles* [2].

Adversitatea filozofilor occidentali, de orientare mai mult sau mai puțin neopozitivistă, este îndreptată în primul rînd împotriva conceptelor „metafizice", fundamentale în filozofia intuiționistă. Acestea, ca dealtfel toate conceptele de bază ale filozofiei tradiționale, apar, în viziune neopozitivistă, drept pseudoconcepte sau simple obscurități [3].

[1] P. Lorenzen, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Springer-Verlag, 1969, p. 3.
[2] A. Tarski, *Introduction to logic*, New York, 1965, p. 235.
[3] W. & M. Kneale, *The development of logic*, Oxford, 1962, p. 674.

În ciuda faptului că neointuiționismul, ca doctrină filozofică, a rămas izolat (contribuții în această direcție au adus totuși H. Weyl, G.F.C. Griss și A. Heyting), rezultatele pur matematice obținute de Brouwer și elevii săi și chiar o parte dintre ideile mai simple, referitoare la fundamentele matematicilor, au fost cunoscute, adoptate și chiar dezvoltate în mod creator[4] *(în matematica recursivă, în matematica constructivistă a lui Markov, matematica fără negație a lui Griss și matematica constructivă a lui Lorenzen).*

O altă direcție intuiționistă, inaugurată de A. Heyting a devenit accesibilă, cum remarcă H. Scholz, chiar și pentru cei care în mod normal gîndesc cu totul altfel *decît intuiționiștii*[5]. *Este vorba de ceea ce se numește de obicei „logica intuiționistă".*

„Logica intuiționistă" a avut însă un destin neprevăzut. Considerînd că matematica este independentă de logică, intuiționiștii autentici, de regulă matematicieni, nu i-au acordat o atenție specială. Dealtfel, însuși Heyting considera că sistemul său nu este decît o aproximare *a matematicii intuiționiste, fiind în fond un sistem* formalist. *Dar această logică, constituind partea cea mai accesibilă și uneori singura acceptabilă (atît matematicienilor, cît și logicienilor și filozofilor de alte orientări), a sfîrșit prin a fi identificată de către aceștia cu intuiționismul însuși.*

Posibilitatea acestei identificări n-a apărut însă de la început. Ea este rezultatul unui proces care a durat peste cinci decenii. Perioada inițială o constituie primele considerații formaliste asupra intuiționismului și primele încercări de formalizare. Ea se încheie cu elaborarea sistemului propus de Heyting în 1930. Strădaințele logicienilor din această perioadă au fost acelea de a face „accesibil" intuiționismul, prezentîndu-l în termenii uzuali ai formalismului la modă. O a doua perioadă a fost aceea în care formaliștii și-au însușit această formă a intuiționismului, încercînd mai întîi traducerea *lui completă în termeni formaliști. Datorită faptului că în această direcție au lucrat personalități de prestigiu, ca K. Gödel, în unele tratate de logică matematică se obișnuiește ca „logica intuiționistă" să fie prezentată mai mult cu scopul de a fi tradusă în termeni formaliști*[6]. *A urmat apoi o perioadă de dezvoltare extensivă a logicii intuiționiste în noile sale veșminte formaliste. S-a ajuns, pe această linie, atît de departe încît unii autori au pus în discuție chiar legitimitatea de a mai asocia acestei logici denumirea de*

[4] *Vide* amănunte în B. van Rootselaar, *Intuiton und Konstruktion*, Studium Generale, 3, 1966, pp. 175—181.

[5] H. Scholz, *Esquisse d'une histoire de la logique*, Paris, 1968, p. 93.

[6] A. N. Prior, *Formal logic*, Oxford, 1963, p. 250 sq.

„intuiționistă” [7]. *În fine, în ultima perioadă au apărut chiar „intuiționiști” care au adoptat nu numai această* logică formalist-neointuiționistă, *ci și maniera formalistă de a o utiliza drept* fundament *al matematicii intuiționiste, ceea ce contrazice în mod evident însăși esența neointuiționismului. Tot Heyting a fost acela care a început lupta împotriva consecințelor formaliste ale propriei sale contribuții. Trebuie remarcat că matematicianul olandez apreciază totuși rezultatele formaliste obținute în cursul acestui proces. Ceea ce susține el este însă faptul că acestea nu au nici o importanță pentru matematica intuiționistă.*

Dar, în felul acesta, s-a ajuns din nou la o situație asemănătoare celei inițiale — la postularea faptului că matematica intuiționistă este independentă nu numai de logica formalistă obișnuită, ci și de cea formalist-neointuiționistă.

Problema care rămîne deschisă este însă aceea de a construi o logică autentic-intuiționistă, adică o logică în care să fie respectat acest postulat. Dar atunci, în ce măsură va mai fi intuiționistă *aceată logică? Soluția a fost sugerată la începutul secolului de către Brouwer. Teza că matematica intuiționistă este* independentă *de logică nu este încălcată prin construcția unei logici care să fie ea însăși* dependentă *de matematica intuiționistă. Aceasta nu înseamnă însă că logica intuiționistă, astfel construită, ar prezenta pentru* matematicianul intuiționist *o mai mare importanță decît logica formalist-neointuiționistă sau decît cea pur formalistă, dar nu înseamnă nici faptul că logica intuiționistă nu prezintă interes pentru* filozoful intuiționist, *iar, în măsura în care ea se* deosebește *de celelalte două, pentru logica modernă în genere.*

Scopul principal al acestei lucrări este acela de a demonstra posibilitatea fundamentării *unei teorii logice care să nu încalce nici una dintre principalele teze ale intuiționismului și de a marca specificul și importanța logică a unei astfel de teorii.*

În al doilea rînd, deoarece autorul nu este intuiționist, va încerca să prezinte un tablou, pe cît posibil complet, fără a intra însă în amănunte, a întregii evoluții, mai mult sau mai puțin formaliste, a logicii în discuție.

În legătură cu primul obiectiv trebuie specificat faptul că au existat, în special în primele perioade amintite, unele contribuții demne de menționat. Heyting însuși încearcă în repetate rînduri să aducă completări în sensul unei dezvoltări comprehensive *a propriei sale logici. Dar rezultatele obținute în această direcție sînt totuși limitate și nesiste-*

[7] A. Schmidt, *Mathematische Gesetze der Logik*, Springer-Verlag, 1960, p. 270 și p. 343.

matice. În particular, nu a fost elaborată încă nici o teorie logică intuitivă *care să corespundă* tuturor *tezelor intuiționiste și care să fie construită ea însăși în conformitate cu acestea.*

În legătură cu al doilea obiectiv există numeroase contribuții printre care trebuie amintite și cele ale matematicienilor români G.C. Moisil și Octav Onicescu. În genere, interesul pentru logica intuiționistă a fost și a rămas încă prezent în lucrările românești de specialitate, alături de interesul crescînd pentru matematica intuiționistă în genere și în special pentru contribuțiile intuiționiste în fundamentele matematicilor. Recent au apărut și cîteva studii asupra filozofiei intuiționiste [8].

În ce privește interesul general pentru logica intuiționistă, trebuie spus că acesta a depășit de mult granițele matematicilor, găsindu-și aplicații și în încercările de interpretare axiomatică a fizicii teoretice [9].

Logica intuiționistă are însă, în primul rînd, o deosebită importanță filozofică. Interpretată corect, ea este un reflex abstract al matematicii intuiționiste, al cărei obiect fundamental de studiu îl constituie „devenirea timpului". Reflexul cel mai abstract al acestei deveniri, a „dialecticii matematice", îl constituie respingerea intuiționistă a valabilității absolute a principiilor logice.

Dialectica, ignorată și izgonită din logică modernă de către ultimii reprezentanți ai neopozitivismului se reîntoarce și încearcă să-și ocupe locul ce i se cuvine. Și nu este lipsit de importanță faptul că, datorită intuiționiștilor, dialectica nu se reîntoarce în logică pe căi dosnice, ci pe drumul principal, atît de bătut astăzi, al sistemelor formale, pe drumul științelor moderne.

București, aprilie 1975 ALEXANDRU SURDU

[8] *Vide*, Al. Surdu, *Probleme logiciste, formaliste și intuiționiste în filozofia greacă*, în: „Probleme de logică", vol. VI, Buc., 1975; *Restricții intuiționiste în analiza logică a limbajului științific* în: *Epistemologia și analiza logică a limbajului științei.*, Buc., 1975 și *Elemente dialectice în epistemologia intuiționistă*, Revista de filozofie, nr. 2, 1975.

[9] P. Mittelstaedt, *Problemele filozofice ale fizicii moderne*, Buc. 1971, p. 230.

I. TEZE INTUIȚIONISTE FUNDAMENTALE

Intuiționismul, ca și logicismul și formalismul, în ciuda faptului că a fost legat direct de evoluția contemporană a matematicilor, are puternice rădăcini istorice. Elemente evident intuiționiste, și chiar o teorie sistematică a intuiției, se găsesc în opera lui Aristotel. Tendințele intuiționiste, raționaliste și conceptualiste în același timp, au fost preluate de către medievali și au dăinuit în diferite forme pînă în epoca modernă. Descartes a fost al doilea mare sistematizator al ideilor intuiționiste. Concepția lui, intuiționist-raționalistă, a determinat în mare măsură specificul filozofiei franceze, iar ecourile ei s-au menținut pînă în epoca contemporană, influențînd direct așa-numitul *curent preintuiționist francez*. O altă sursă directă a intuiționismului contemporan a constituit-o filozofia clasică germană, în special criticismul kantian și dialectica lui Hegel. Intuiționismul, în forma lui filozofică lărgită, numită de regulă *neointuiționism*, conține și numeroase elemente idealist-subiective, provenite din filozofia engleză, în speță de la Berkeley, și elemente de filozofie indiană, preluate uneori direct, alteori prin filiera lui Nietsche.

Dar, istoria propriu-zisă a intuiționismului contemporan începe odată cu apariția logicismului, în forma lui rudimentară inițiată de Georg Cantor. Apariția logicismului a determinat o reacție contrară cu vădite trăsături intuiționiste (la Weierstrass, Kronecker și Hadamard).

Émile Borel a fost primul care a încercat o expunere sistematică a ideilor intuiționiste referitoare direct la matematici, iar Henri Poincaré a fost primul adversar declarat al logicismului și al formalismului în același timp.

Însă ideile savanților amintiți, chiar și atunci cînd erau adoptate fără rezerve, căci reprezentau în fond poziția tradițională a matematicii, erau trecute cu vederea și considerate mai degrabă comode decît eficiente, în orice caz, lipsite de spectaculozitate și neprevăzut.

Situația a fost cu totul alta în legătură cu ideile intuiționiste propriu-zise. Teza lui L.E.J. Brouwer, susținută pentru prima dată

în 1907 şi întărită apoi în 1908, despre caracterul suspect al principiilor logice (*De onbetrouwbaarheid der logische principes*), a trezit de la început reacţii violente şi adversităţi. Primii adepţi ai intuiţionismului s-au ivit abia după 1920.

Filozofia intuiţionistă a apărut în *trei* variante. Prima, cea mai importantă şi cea mai complexă, este aceea a lui Brouwer. Celelalte două, a lui G. F. C. Griss şi a lui A. Heyting, deşi independente una de cealaltă, au ca punct de plecare tezele lui Brouwer. Datorită faptului că Griss a elaborat o logică intuiţionistă oarecum independentă de propriile sale concepţii filozofice, dar legată în special de contribuţiile lui Heyting, nu este necesară aici o expunere detaliată a concepţiei sale general-filozofice. Vor fi amintite totuşi, la momentul potrivit, o parte din tezele epistemologice, legate de elaborarea aşa-numitei matematici fără negaţie. În plus, urmărind problematica logică a intuiţionismului, legată nemijlocit de contribuţiile lui Heyting, nu mai este necesară o expunere separată a ideilor sale filozofice.

În legătură cu varianta filozofică a lui Brouwer, indispensabilă oricărei consideraţii asupra intuiţionismului în genere şi deci şi asupra logicii intuiţioniste, trebuie menţionat însă faptul că ea conţine multe elemente filozofice, cum ar fi cele etice, estetice sau religioase, importante, ba chiar fundamentale pentru viziunea lui general filozofică, dar care sînt cu totul independente de logica intuiţionistă. Din această cauză, vor fi expuse în continuare numai acele teze, mai mult sau mai puţin filozofice, uneori pur matematice, care au determinat apariţia logicii intuiţioniste şi au influenţat evoluţia ei ulterioară. Ca punct de plecare, pentru expunerea acestor teze, poate fi abordată *problema paradoxelor logico-matematice.*

În esenţă, ca şi Aristotel, cu referinţă la paradoxele eleate, şi Poincaré, la cele cantoriene, Brouwer consideră că paradoxele logico-matematice în genere sînt nişte *erori*, a căror cauză rezidă în identificarea logicistă a matematicii cu logica. Dar acest lucru fusese deja stabilit de către Poincaré. Meritul lui Brouwer constă în aceea că, ducînd mai departe investigaţia, a găsit sursa acestei identificări în „confuzia dintre actul construcţiei matematice şi limbajul matematic" [1]. Numai ultimul, în ciuda specificului său, se supune mai mult sau mai puţin legilor obişnuite ale oricărui limbaj, deci legilor logice. Dar, pentru matematica efectivă nu este esenţial *mijlocul de comunicare*, expresia lingvistică a rezultatului matematic, ci construcţia lui mentală. Expresia lingvistică a rezultatelor matematice se dove-

[1] L. E. J. Brouwer, *Over de grondslagen der Wiskunde*, Amsterdam, 1907, p. 176.

deşte uneori *greşită*, iar construcţia mentală a acestor rezultate, demonstraţia matematică efectivă, este un act creator al minţii umane care, după cum observase deja Poincaré, poate fi exprimat lingvistic şi explicitat logic numai în mod *aproximativ*. Dacă limbajul în care este exprimată construcţia respectivă este contradictoriu sau nu, acest lucru este lipsit de importanţă matematică. Din această cauză, consideră Brouwer, paradoxele în discuţie nu sînt, ci „numai par a fi paradoxe matematice"[2]. Dar, pe de altă parte, ele nu pot fi considerate nici paradoxe logice, deoarece nu apar în logică în genere, ci numai într-o logică, cum este cea matematică, în care *principiul terţului exclus* este considerat *absolut* şi *universal valabil*.

Dacă matematica nu este identică cu logica şi dacă atît matematica cît şi logica sînt practicate *corect*, atunci apariţia paradoxelor este imposibilă. O interpretare corectă a matematicii presupune, după Brouwer, o teorie matematică *anticantoriană*, iar o interpretare corectă a logicii presupune o teorie *antilogicistă*.

Punctul central al matematicii intuiţioniste, pe baza căruia pot fi infirmate tezele matematicii cantoriene, îl constituie aşa-numita *teorie intuiţionistă a continuului*. Ea are două aspecte : unul legat de interpretarea *continuului liniar* şi altul legat de problema admiterii unor *alte puteri decît aceea a continuului*.

Ideea generală de continuu este de natură geometrică. Încercarea de a defini continuul geometric prin numere a dus la elaborarea conceptului de *continuu aritmetic*. Acesta, în accepţia lui Cantor, mai are însă numeroase determinaţii de tip geometric, deci spaţiale. Brouwer opune acestui concept continuul aritmetic *temporal*, identificat cu *„scurgerea timpului"*.

Imaginea cantoriană, spaţială a continuului aritmetic a determinat o interpretare *statică* a matematicii, limitată la succesiuni de entităţi matematice infinite *predeterminate*, la ceva dat, care chiar dacă nu a fost cunoscut încă, ar putea fi conceput de către un eventual „Intelect Suprem"[3]. Problemele referitoare la aceste entităţi ar exista şi ele în sine şi ar fi gata rezolvate, urmînd să fie doar *descoperite*.

Determinaţiile spaţiale ale continuului aritmetic cantorian permit interpretarea succesiunilor de entităţi matematice drept succesiuni *actual* infinite, pe cînd determinaţia temporală nu permite decît o interpretare *potenţial* infinită a succesiunilor de entităţi mate-

[2] L. E. J. Brouwer, *De onbetrouwbaaheid der logische principes*, retipărit în *Wiskunde, waarheid, werkelijkheid*, Groningen, 1919, p. 8.

[3] *Vide* amănunte în E. W. Beth, *The foundations of mathematics*, Amsterdam, 1959.

matice. În termeni aristotelici, elementele continuului cantorian sînt *concomitente*, deci *date* simultan; elementele continuului brouwerian nu pot fi decît *consecutive*, deci *urmînd* să fie date.

Dar, în ambele accepții, acest continuu, identificat de regulă cu șirul numerelor naturale, este considerat *numărabil*. Mulțimile cardinal echivalente cu șirul numerelor naturale se numesc *infinit numărabile* sau de puterea $\aleph_0$.

Cantor admite însă și existența unor mulțimi infinite *nenumărabile*, a căror putere ar fi $\aleph_1$. Ca exemplu este dat continuul numerelor reale dintre 0 și 1, notat cu C(0,1) și numit *continuu liniar*. Demonstrația lui Cantor, cunoscută sub numele de „metoda diagonalei", se bazează pe faptul că în cadrul succesiunii respective de numere reale, puse în corespondență biunivocă cu numerele naturale, pot fi introduse oricînd noi numere reale. Această demonstrație nu are valoare din punct de vedere intuiționist, căci mulțimile de putere $\aleph_0$ fiind numai *potențial* infinite și numărabile admit introducerea permanentă de noi entități [4]. Deci C(0,1) și orice altă mulțime infinită este, din punct de vedere intuiționist, de puterea $\aleph_0$.

Dacă nu se admite acest lucru, deci dacă se procedează cantorian, atunci trebuie admis faptul că $\aleph_1 > \aleph_0$ sau $\aleph_1 \subset \aleph_0$, deci că există mulțimi infinite cu puteri diferite de $\aleph_0$, respectiv $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3, \ldots$, care se conțin reciproc. Altfel spus, există mulțimi de mulțimi infinite și în ultimă instanță o *mulțime a tuturor mulțimilor*. Este însă evident că neadmiterea conceptului de „mulțime a tuturor mulțimilor", înseamnă implicit imposibilitatea apariției paradoxelor și totodată imposibilitatea transcrierii logiciste a entităților matematice și deci a identității dintre matematică și logică. Altfel spus, dacă matematica este interpretată corect (*id est* în manieră intuiționistă), atunci paradoxele nu mai au nici un sens.

Teoria intuiționistă a continuului se bazează pe teoria generală a *infinitului potențial*. O mulțime este considerată infinită, dacă una dintre submulțimile ei are aceeași putere cu ea, respectiv $\aleph_0$. Oricîte mulțimi ar conține o mulțime infinită, ea nu va avea o putere mai mare decît $\aleph_0$. O ipotetică mulțime a tuturor mulțimilor, indiferent dacă acestea sînt infinite sau nu, ar avea tot puterea $\aleph_0$, deci nici ea nu s-ar deosebi, ca putere, de o mulțime *oarecare* infinită. Aceasta nu înseamnă însă că mulțimile infinite, avînd *aceeași* putere, sînt *identice*. Există succesiuni infinite *determinate*, mai precis succesiuni care

[4] *Vide* explicații amănunțite la O. Becker, *Măreția și limitele gîndirii matematice*, Buc., 1968, p. 122 sq.

înaintează *ad infinitum*, pe baza unor *legi de formare* a elementelor. Printr-o astfel de lege poate fi determinat orice element al șirului în funcție de elementul precedent. În genere, legea garantează înaintarea succesiunii la infinit, oferind în același timp o metodă prin care poate fi construit întotdeauna un element pe baza celor construite deja. Practic aceste succesiuni nu *sînt* infinite, ci *tind* către infinit.

Există însă și succesiuni infinite *nedeterminante*, care iau naștere treptat prin *acte libere de alegere* a elementelor. O astfel de mulțime este numită și *mediu al devenirii libere (Medium des freienWerdens)*. Un mediu al devenirii libere poate să ia naștere în urma prelungirii unor operații matematice, cum ar fi aceea de obținere a zecimalelor lui π, sau pur și simplu prin alegeri libere *arbitrare*. Acestea pot fi la rîndul lor *mai mult* sau *mai puțin libere*. Fiind vorba de o succesiune care înaintează liber $p_1, p_2, p_3, \ldots$ și de entitățile obținute în prealabil în aritmetica finită, atunci alegerea liberă cu privire la primul termen, să zicem a_1, al succesiunii, poate să fie *cu totul liberă*, respectiv a_1 poate fi un număr natural oarecare, o operație cu astfel de numere, un număr întreg negativ sau rațional sau o operație cu astfel de numere ș.a.m.d. Dar termenul a_1 poate fi admis și printr-o alegere *mai puțin liberă*, dacă dintre entitățile obținute în prealabil în aritmetica finită sînt excluse numerele raționale sau cele fracționare. Restricția poate să sune chiar astfel : „să se aleagă a_1 drept număr par mai mic decît 8”. Este evident că și în acest caz este vorba de o alegere liberă, dar mai puțin liberă decît în cazul în care restricția sună „*a* trebuie să fie un număr par”.

A concepe infinitul ca mediu al devenirii este o idee care apărea deja la Aristotel (οὐδὲ μένει ἡ ἀπείρα ἀλλὰ γίνεται). [5] De altfel, Aristotel a fost și primul care a considerat că infinitul nu poate fi decît potențial (δυνάμει). Brouwer, fără să se bazeze pe doctrina aristotelică, concepînd astfel infinitul, ajunge, ca și Aristotel, la concluzia că în aceste cazuri (în domeniul devenirii) nu ne mai putem încrede în gîndirea obișnuită, cu legile ei (τὸ δὲ τῇ νοήσει πιστεύειν ἄτοπον, zice Aristotel) [6]. Brouwer vorbește despre *caracterul suspect al legilor logice*, și în genere despre faptul că logica nu are pretutindeni (în filozofie, artă, științe) aceeași valoare [7]. Suspiciunea *(onbetrouwbaarheid)* brouweriană seamănă în mod evident cu „îndoiala” carte-

[5] Aristoteles, *Physica*, Γ, 7, 207 b, 14.
[6] *Phys.*, Γ, 8, 208 a, 14—15.
[7] Brouwer, *De onbetrouwbaarheid...*, p. 12.

ziană *(de omnibus dubitandum)*, avînd însă o sferă mai restrînsă, căci vizează numai domeniul logicului.

Dar, limitînd totuși discuția la domeniul matematicii transfinite, Brouwer constată că aici *nu toate* principiile logice sînt suspecte. Sînt certe de exemplu principiul silogismului și principiul contradicției [8]. Suspect este principiul terțului exclus *(tertium non datur)*, urmat de legea dublei negații *(negatio duplex)*, iar pe baza acestora se dovedește suspectă și demonstrația indirectă *(reductio ad absurdum)* și multe alte legi logice sau tautologii ale calculului propozițional, derivate din cele menționate.

Aceasta nu înseamnă însă că principiile în discuție *ar fi false*, ci doar faptul că *valabilitatea lor nu este universală*. În cadrul succesiunilor infinite determinate există situații în care rezolvarea unei probleme ar necesita o infinitate de operații. Aceasta înseamnă că, în ciuda faptului că un enunț se dovedește fals, enunțul contrar (negația acestuia) nu poate fi considerat pur și simplu adevărat *(tertium non datur)*, căci nu există posibilitatea reală de a-l verifica. În cadrul succesiunilor infinite nedeterminate (arbitrare sau nu) situația este și mai clară. A considera, de exemplu, că enunțul „Între zecimalele lui π nu apare succesiunea 123456789" este fals (căci dacă nu ar putea să apară această succesiune, atunci șirul zecimalelor lui π nu ar fi infinit) nu ne permite să admitem pur și simplu că enunțul contrar, respectiv „Între zecimalele lui π apare succesiunea 123456789", este adevărat, căci nimeni nu a verificat încă acest lucru. În situații analoage se poate întîmpla însă, în ciuda caracterului infinit și chiar nedeterminat al succesiunii în discuție, ca enunțul contrar să poată fi verificat. Să presupunem că este vorba de succesiunea (Z) formată din cifrele a două zaruri aruncate la un joc de table. Presupunînd că jocul ar dura foarte mult, enunțul „Între cifrele succesiunii (Z) nu poate să apară suita de perechi 66554433" este evident fals, în timp ce enunțul contrar, *cu totul întîmplător* însă, se poate dovedi adevărat chiar în cursul unei singure partide, dar se poate de asemenea întîmpla ca dovada să nu apară, oricît ar dura jocul respectiv.

În domeniul transfinitului deci principiile în discuție nu sînt universal valabile. Dar este ușor de arătat, chiar pe un exemplu de genul celui anterior, cum a sugerat F. Gonseth, că valabilitatea acestor principii poate fi relativă și în domeniul finitului [9], căci și

[8] *Ibidem*, p. 9.

[9] F. Gonseth, *Les fondements des mathématiques*, Paris, 1926, p. 232.

aici sînt situaţii în care, chiar dacă nu este vorba de o infinitate de operaţii, anumite enunţuri sînt *practic* imposibil de verificat.

Toate acestea dovedesc, după Brouwer, faptul că o logică interpretată corect trebuie să fie o teorie în care *tertium non datur*, *negatio duplex*, *reductio ad absurdum* şi alte formule derivate din ele nu sînt tautologii. Or, logica matematică, profesată de logicişti, nu este o astfel de teorie. Dacă ar fi, atunci în mod evident nu ar avea de-a face cu paradoxele, căci toate paradoxele în discuţie au la bază admiterea valabilităţii universale a legii terţului exclus.

Dar concepţia lui Brouwer nu are numai aspecte anticantoriene şi antilogiciste, ci şi aspecte *antiformaliste*, şi în primul rînd astfel de aspecte. Este vorba aici chiar de celebra teorie a *intuiţiei*, dela care a derivat denumirea doctrinei.

Considerînd că matematica este independentă de logică Brouwer a încercat reconstrucţia ei pe alte baze decît cele logico-matematice. Teoria brouweriană a intuiţiei este destul de complicată. Ea conţine elemente de tip aristotelic, kantian, dar şi de tip berkeleyan şi chiar hegelian. Esenţial, pentru cadrul discuţiei de faţă, este faptul că în matematica intuiţionistă nu sînt admise decît entităţi matematice şi operaţii cu astfel de entităţi, care pot fi construite intuitiv, fie direct fie indirect.

Făcînd abstracţie de mecanismul complicat al intuiţiei brouweriene, se poate considera că pe baza acesteia pot fi construite primele două numere. Apoi unul dintre acestea poate fi conceput la rîndul său drept o dualitate, obţinîndu-se numărul *trei* ş.a.m.d. „Numerele" în discuţie nu sînt cifre, ci *concepte*, matematica intuiţionistă fiind considerată o „activitate nelingvistică a minţii umane". Este neesenţial pentru activitatea matematică faptul că aceste concepte sînt exprimate sau nu (verbal sau în scris).

Construcţia intuitivă a numerelor naturale cît şi *repetarea* sau *anularea* unor astfel de construcţii (*id est* construcţia operaţiilor aritmetice) este garantată de ceea ce Brouwer numeşte „primul act intuiţionist". „Al doilea act intuiţionist" garantează construcţia intuitivă a succesiunilor nedeterminate prin alegeri libere arbitrare sau nu. Metoda constructivă nu presupune însă construcţia *da capo al fine* a oricărei probleme matematice. Numai primele numere pot fi construite intuitiv, restul se obţine prin *repetarea* primelor construcţii sau prescurtat prin indicarea unei *metode de construcţie*. Repetarea însăşi (iteraţia matematică *constructivă*) nu este sterilă, căci permite surprinderea intuitivă a unor legităţi, cum este de exemplu *principiul inducţiei complete*.

Construcția intuitivă reprezintă *garanția existenței matematice*. Ceea ce nu poate fi construit (mediat sau imediat) pe cale intuitivă este considerat ca *lipsit de sens*. Unul dintre scopurile matematicii intuiționiste este acela de a *curăța* matematica clasică de aceste *nonsensuri*. Este vorba de ceea ce formaliștii numesc ,,mutilarea'' matematicii. Nonsensurile pot fi, după St. Körner: *concepte* matematice neintuitive sau *ideale*, de exemplu infinitățile actuale ale lui Cantor, respectiv numerele transfinite, cărora nu le corespunde nici o construcție intuitivă; *propoziții*, *legi* sau *axiome ideale* — primele deoarece *descriu* sau *exprimă* concepte ideale, ultimele deoarece le *produc* numai pe cale neintuitivă —, de exemplu propozițiile care descriu infinități actuale, axioma alegerii, a compoziției etc. și legi ca *tertium non datur* și *negatio duplex* și, în fine, *inferențe* sau *raționamente ideale*, fie pentru faptul că operează asupra unor concepte sau propoziții ideale, fie pentru aceea că sînt aplicate fără restricții la domenii în care valabilitatea lor este relativă *(reductio ad absurdum)*.

Construcția intuitivă reprezintă prin urmare garanția existenței matematice. De aici decurge o teză fundamentală a matematicii intuiționiste, care este în mod evident opusă formalismului: *existența matematică* (concepută intuitiv) *implică întotdeauna necontradicție logică, dar necontradicția logică nu implică întotdeauna existență matematică efectivă*. În mod concret, această teză a determinat atitudinea permanent negativă a intuiționiștilor față de încercările formaliste de *axiomatizare* a teoriei mulțimilor.

Intuiționistic vorbind, orice teorie matematică construită intuitiv este evidentă și necontradictorie. Axiomatizarea ei *ulterioară* nu poate să aducă nimic în plus. Ea reprezintă doar *descrierea și sistematizarea expresiilor lingvistice* corespunzătoare *rezultatelor* matematice obținute în *prealabil*. În cadrul obișnuit al teoriei mulțimilor nu a fost obținută *în prealabil* o teorie intuitivă corespunzătoare, respectiv evidentă și necontradictorie (*dovezi*: neclarități în însăși definirea conceptului de mulțime, a operațiilor cu mulțimi și evident apariția paradoxelor în cadrul raționamentelor care conțin astfel de concepte și operații). Prin urmare, axiomatizarea teoriei mulțimilor, prin intermediul căreia formaliștii nu urmăresc descrierea și sistematizarea unei teorii evidente și necontradictorii în sine, ci *construcția* ei axiomatic-necontradictorie, este inadmisibilă din punct de vedere intuiționist. Într-adevăr, axiomatizarea, pe baza unor restricții formaliste, duce la o teorie necontradictorie, dar menține în același timp *toate* conceptele dubioase care au generat contradicțiile.

Ideile expuse mai sus nu epuizează problematica intuiţionistă, nici măcar pentru cadrul restrîns al paradoxelor logico-matematice, care a constituit punctul de plecare al discuției, dar ilustrează, în schimb, cîteva dintre tezele *fundamentale* ale doctrinei intuiţioniste. Acestea prezintă un interes deosebit în contextul lucrării de față, căci ele marchează particularitățile logice ale intuiționismului. Ideile în discuție pot fi rezumate în următoarele „teze intuiționiste"

(I) Matematica pură este o activitate *independentă* față de limbaj.

(II) Obiectul matematicii pure îl constituie construcțiile matematice *intuitive nelingvistice.*

(III) Obiectul logicii matematice îl constituie *limbajul* matematic în care sînt exprimate, mai mult sau mai puțin exact,construcțiile matematice.

(IV) Existența matematică efectivă implică *întotdeauna* noncontradicție logică ; noncontradicția logică *nu implică* însă *întotdeauna* existența matematică efectivă.

(V) Practicarea unei matematici corecte și a unei logici corespunzătoare face *imposibilă* apariția paradoxelor.

(VI) *Tertium non datur* și *duplex negatio* nu pot fi universal valabile în cadrul unei logici corecte, dar nu pot fi nici false.

(VII) Axiomatizarea nu poate fi admisă drept metodă de *construcție* a teoriilor matematice, ci numai ca *mijloc auxiliar* pentru *descrierea* și *sistematizarea* teoriilor matematice intuitive *preexistente.*

Obiectivul principal al intuiţionismului propriu-zis a fost și a rămas profesarea unei matematici intuitive, pure, independentă de limbaj și logică. Intuiţioniştii nu au fost însă adversari ai *logicii în genere*, ci numai ai logicii matematice în accepție logicistă sau formalistă. Intuiționistic vorbind, este cu totul îndreptățită profesarea unei *logici simbolice*, adică a unei logici în formă de calcul, cu condiția ca aceasta să nu fie aplicată la matematici, nici pentru *fundamentarea* (poziția logicistă) și nici pentru *construcția* lor formală (poziția formalistă), ci dimpotrivă *matematicile trebuie să constituie fundamentele logicii, să fie aplicate la logică*, după ce au fost construite intuitiv.

Intuiţionismul, în forma lui originară (așa cum a fost profesat în Olanda pînă în 1930 și a continuat să fie profesat apoi numai de către intuiționiștii conservatori) a lăsat însă fără răspuns întrebarea, pe care filozoful olandez G. Mannoury i-a pus-o lui Brouwer încă de

la începutul activităţilor intuiţioniste : „Oare nu este posibilă o descriere formală a regularităţilor care apar în metoda de gîndire intuiţionistă"? Cu alte cuvinte, nu este oare posibilă elaborarea unei *logici a matematicii intuiţioniste*, elaborarea unei logici care să fie deosebită de logica matematică obişnuită şi în care să fie respectate toate tezele intuiţioniste? Pentru a oferi răspunsul corespunzător este necesară însă cunoaşterea prealabilă a încercărilor făcute în această direcţie.

II. FORMALIZAREA TEZELOR INTUIȚIONISTE

Unul dintre primii care au încercat să trateze *comparativ* intuiționismul și formalismul și care a încercat un răspuns, ce-i drept de principiu, la întrebarea lui Mannoury a fost Richard Baldus.

Richard Baldus observă că deosebirea esențială dintre intuiționism și formalism, în ce privește tratarea matematicii, constă în aceea că reprezentanții primului consideră ferme și evidente legile simple ale numerelor întregi, care sînt surprinse prin intuiție și care, nu numai că nu necesită nici o demonstrație, dar sînt chiar nedemonstrabile, pe cînd reprezentanții formalismului descompun întreaga matematică în relații logico-formale[10].

În privința concepției intuiționiste, expusă de către R. Baldus, trebuie remarcat că aceasta nu este o simplă reproducere a doctrinei lui Brouwer. La el întîlnim și idei inacceptabile din punct de vedere pur intuiționist, cum ar fi aceea referitoare la „definiția existențială a entităților matematice printr-un număr finit de cuvinte", a cărei admitere ar însemna încălcarea primelor două teze intuiționiste.

Baldus ilustrează teza intuiționistă (VI) prin trei exemple: (1) teorema lui Goldbach — fiecare număr par poate fi reprezentat prin suma a două numere prime —, (2) clasificarea numerelor în algebrice — care satisfac o egalitate algebrică ai cărei coeficienți sînt numere întregi — și transcendente — care nu au proprietatea amintită și (3) problema lui Fermat — există oare patru numere naturale $n > 2$, x, y și z pentru care să fie valabilă egalitatea $x^n + y^n = z^n$? În legătură cu (1) conchide că, deși ar fi normal ca *fiecare* număr par să se comporte astfel, este practic imposibil să se dovedească acest lucru. Față de (2) conchide că, din punct de vedere intuiționist, nu are sens *disjuncția*, „sau algebric sau transcendent" aplicată oricărui număr, deoarece nu se știe dacă pentru oricare număr se poate decide

[10] R. Baldus, *Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik*, Karlsruhe, 1924, p. 24.

practic dacă este algebric sau transcendent, respectiv nu se cunoaşte nici un procedeu general de decizie pentru aceste cazuri. În legătură cu (3) conchide că, în mod evident, există cazuri în care nu se poate decide nimic cu privire la membrii unei disjuncţii de forma lui *tertium non datur*. Adică, în cazul problemei lui Fermat, nu poate fi admis nici răspunsul afirmativ, că există numerele în discuţie, nici răspunsul negativ, că nu există astfel de numere. Exemplele sînt *gradate* şi sugerează o *ierarhizare* a „suspiciunilor brouweriene" (1) simpla suspiciune care *nu afectează* conţinutul unei teoreme, (2) suspiciunea care pune *la îndoială* teorema şi (3) suspiciunea *care respinge* teorema.

Dintre acestea, cea mai interesantă este suspiciunea (2) care pune la îndoială universalitatea *deciziei prin disjuncţie* (prin *tertium non datur*). R. Baldus, accentuînd asupra importanţei logice a nedecidabilităţii *(Unendscheidbarkeit)*, se înscrie drept precursor intuiţionist al demonstraţiei lui K. Gödel din 1931. Iată cum exprimă Baldus acest lucru în mod plastic : „...*der Intuitionist erblickt beim Satze vom ausgeschlossenen Dritten stets neben dem Januskophe des entweder-oder das Medusenhaupt der Unendscheidbarkeit*" [11].

Alături de această previziune, mai mult sau mai puţin evidentă şi din punctul de vedere al lui Brouwer, este aceea prin care Baldus descrie aproape exact *viitorul formalist* al intuiţionismului. El remarcă faptul că rezultatele obţinute de către intuiţionişti nu sînt altceva decît o clarificare, o desăvîrşire a „...ceea ce pentru unii matematicieni, probabil destul de numeroşi, era numai un sentiment neplăcut faţă de multe demonstraţii, în special din teoria mulţimilor" [12]. Logic vorbind, intuiţioniştii au căutat „fundamentele originare ale acestui simţămînt" şi au ajuns la concluzia „restrîngerii" la acele raţionamente care sînt valabile pentru *oricine* şi *oriunde.* Faţă de această contribuţie incontestabilă „Formaliştii, prevede Baldus, se vor împărţi în două tabere: unii, care după structura lor intelectuală, nu vor înţelege obiecţiunile intuiţioniştilor ; pentru aceştia toate demonstraţiile matematice vor rămîne la fel de sigure ; alţii, care vor admite că raţionamentele, atestate şi raţionamentele respinse de către intuiţionişti nu au aceeaşi stringenţă logică..." [13]. A doua grupă, continuă Baldus, va extinde demonstraţia lipsei de contradicţie a lui Hilbert pe spezele intuiţionismului. În felul acesta se vor obţine *două* sisteme complet axiomatizate, ambele corecte în sine. Apare deci, după previziunea mult mai vagă a lui Mannoury, ideea

[11] *Ibidem*, p. 28.
[12] *Ibidem*, p. 33.
[13] *Ibidem*, p. 34.

clară de „sistem axiomatic intuiţionist", şi chiar ideea de „formalism neointuiţionist".

A. N. Kolmogorov prezintă în 1925, avînd *poate* chiar înaintea lui Baldus, nu numai ideea, ci şi iniţiativa de a construi efectiv *primul sistem axiomatic* de logică intuiţionistă. Lucrarea „О принципе *tertium non datur*" a rămas însă mult timp necunoscută. Ea nu este citată de Heyting nici măcar în 1955, cînd a adunat în *Les fondements des mathématiques* o impresionantă bibliografie privind intuiţionismul. Lucrarea în discuţie a fost tradusă în engleză şi retipărită în 1967 [14].

Kolmogorov porneşte de la ideea, formulată deja de către H. Weyl, a aplicării în special a tezei intuiţioniste (VI), ilustrată de obicei numai cu exemple din matematica transfinită, şi în domeniul finitului.

De acord cu Brouwer, el consideră că acest lucru este important chiar şi pentru aceia pe care îi interesează *numai* domeniul matematicii finite. Aceasta, deoarece toate concluziile finitare corecte, obţinute prin utilizarea legii terţului exclus, pot fi demonstrate şi fără ajutorul acestei legi [15]. Cu alte cuvinte, că logica transfinitului, în care se aplică teza (VI), este valabilă şi în domeniul finitului, pe cînd invers nu, căci concluziile obţinute cu ajutorul legii terţului exclus sînt corecte numai dacă orice judecată, astfel obţinută, este înlocuită cu o judecată care asertează dubla ei negaţie. El numeşte dubla negaţie a unei judecăţi „pseudoadevărul" ei şi conchide că numai în matematica pseudoadevărului este legitimă aplicarea legii terţului exclus.

Kolmogorov prezintă la început axiomele lui Hilbert pentru calculul propoziţional. Este vorba de axiomele implicaţiei [16].

(A_1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$,

(A_2) $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$,

(A_3) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$,

(A_4) $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$,

(A_5) $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$,

(A_6) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((\sim p \rightarrow q) \rightarrow q)$.

[14] *Cf.* A. N. Kolmogorov, *On the principle of excluded middle* in: „From Frege to Gödel", Harvard University Press, 1967.

[15] *Ibidem*, p.416.

[16] D. Hilbert, *Die logischen Grundlagen der Mathematik*, Mathematische Annalen, 88, 1923, p. 153.

Dintre acestea, (A_6) exprimă legea terțului exclus într-o formă ceva mai complicată. Deci (A_6) nu este admisibilă din punct de vedere intuiționist.

Kolmogorov încearcă o primă interpretare intuiționistă a functorilor „implică" și „non". El arată că (A_5) (*ex falso sequitor quodlibet*) nu poate fi o axiomă a logicii intuiționiste a propozițiilor [17] — Kolmogorov folosește termenul de „judecată" (*judjement*) în locul termenului uzual de „propoziție" — deoarece nu are nici un temei intuitiv. Într-adevăr, dacă prin negație se înțelege, în termenii lui Brouwer, absurditatea [18], atunci este evident că din ceva absurd nu poate urma nici adevărul, nici falsul. Astfel, conchide Kolmogorov, din punct de vedere intuiționist nici una din cele două axiome ale negației, (A_5) și (A_6), nu poate fi o axiomă a logicii generale a propozițiilor. În locul celor două axiome ale negației, el propune axioma

$$(A'_5) \qquad (p \to q) \to ((p \to \sim q) \to \sim p),$$

pe care o numește principiul contradicției (Dacă din p urmează, atît adevărul, cît și falsitatea lui q, atunci p este fals). În felul acesta, menținînd primele patru axiome ale lui Hilbert și adăugînd (A'_5), se obține ceea ce Kolmogorov numește „Sistemul Brouwer", spre deosebire de „Sistemul Hilbert".

Trebuie menționat de la început faptul că denumirea de „sistem Brouwer", „logică a lui Brouwer", etc., nu sînt cu nimic îndreptățite. Aici este vorba despre „sistemul lui Kolmogorov" pe care îl notăm Σ_K spre deosebire de "sistemul lui Hilbert" (Σ_H). După cum remarcase deja R. Baldus, sisteme ca Σ_H și Σ_K sînt *sisteme formaliste* și în genere *orice sistem axiomatic de tip logico-matematic este un sistem formalist.* „Sistem axiomatic intuiționist" este o *contradictio in adjecto.* Σ_k este un *model formalist* al ideilor lui Brouwer, *a codification of Brouwer's ideas*, cum spune Hao Wang [19].

Σ_K are deja calitățile și defectele oricărui „sistem axiomatic intuiționist", termeni prin care vom înțelege „model axiomatic al ideilor intuiționiste". Calitățile lui sînt acelea ale oricărui sistem formalist. Defectele țin de faptul că autorul nu ia în considerație decît *una* dintre cele șapte teze intuiționiste, și anume teza (VI).

[17] A. N. Kolmogorov, *op. cit.*, p. 421.

[18] Kolmogorov se referă la accepția negației din lucrarea lui L. E. J. Brouwer, *Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe*, din 1923.

[19] H. Wang, *Notă* la lucrarea lui Kolmogorov din *op. cit.*, p. 114.

Deoarece (A'_5) nu contravine axiomelor lui Hilbert, ea, consideră Kolmogorov, poate înlocui (A_5), iar (A_6) poate fi înlocuită cu

(A'_6) $$\sim \sim p \rightarrow p$$

În cazul acesta, $\Sigma_K = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A'_5\}$ iar $\Sigma_H = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A'_5, A'_6\}$. Un merit deosebit al lui Kolmogorov, din punct de vedere formalist, este acela de a fi stabilit raportul dintre Σ_K și Σ_H, respectiv :

$$\Sigma_K = \Sigma_H - (A'_6),$$

sau invers

$$\Sigma_H = \Sigma_K + (A'_6).$$

Cele două formule ilustrează perfect caracterul *mecanicist* al trecerii de la o logică la alta și invers — trecerea este redusă la simpla *adăugare* sau *scădere* a unei axiome, ceea ce conferă sistemului un caracter evident formalist.

Fundamentul logicii lui Kolmogorov îl constituie teza intuiționistă (VI). Din această cauză, Σ_K este numai *parțial* fundamentat din punct de vedere intuiționist. Ce-i drept, la Kolmogorov întîlnim și unele încercări de argumentare de tip intuiționist. Astfel, respingerea lui (A_6) și înlocuirea lui (A_5) nu sînt făcute cu totul arbitrar, cum ar fi procedat un formalist propriu-zis, ci pe baza interpretării lor. Cu toate acestea, Kolmogorov nu pornește, cum ar fi fost normal, de la matematica intuiționistă către logică, ci de la un sistem de logică formalistă, care, conform primelor trei teze intuiționiste, nu are nici o legătură cu matematica intuiționistă.

Kolmogorov consideră că Σ_K este „logica generală" aplicabilă oricărui domeniu matematic, pe cînd Σ_H ar fi o „logică specială" cu domeniu limitat de aplicabilitate. Dar, în acest sens, logica intuiționistă, ca sistem formal (Σ_K), nu face decît să înlocuiască sistemele existente prin depășirea limitelor impuse de *tertium non datur*. Ea devine un fel de logică formalistă absolută, ceea ce, în mod evident, nu este în conformitate cu teza intuiționistă (VII). La Kolomogorov nu întîlnim nici o restricție privind limitele metodei axiomatice. Singura problemă rămîne aceea de a opta între unul dintre cele două sisteme.

Kolmogorov încearcă şi construcţia unui sistem axiomatic intuiţionist pentru logica predicatelor. El stabileşte următoarele axiome :

(P_1) $(\forall x)(A(x) \to B(x)) \to ((\forall x) A(x) \to (\forall x) B(x))$,

(P_2) $(\forall x)(A \to B(x)) \to (A \to (\forall x) B(x))$,

(P_3) $(\forall x)(A(x) \to C) \to ((\exists x) A(x) \to C)$,

(P_4) $A(x) \to (\exists x) A(x)$.

Procedeele de deducţie sînt cele obişnuite în orice sistem formalist.

Problemele pe care le lasă deschise Kolmogorov sînt legate de perfecţionarea sistemului. El însuşi nu are convingerea că Σ_K ar fi un sistem axiomatic complet.

Deoarece lucrarea lui Kolmogorov nu a fost cunoscută, previziunea lui Mannoury şi Baldus a luat cîteva forme destul de controversate, care prezintă interes prin faptul că ridică problema unei *logici* intuiţioniste în genere *înainte* de a fi cunoscut un sistem axiomatic de tip Σ_K.

R. Wavre se străduieşte să fie un prezentator cît mai fidel, şi imparţial, al controversei dintre formalism şi intuiţionism. El încearcă uneori chiar o tratare istorică a unora dintre probleme, cum ar fi aceea a raportului dintre obiectul matematic şi limbajul matematic, care, în forma generală a raportului dintre obiect sau gîndire şi limbaj, a apărut încă din antichitate [20]. El se referă pe larg şi la poziţia lui P. Boutroux, care este într-adevăr de natură intuiţionistă.

P. Boutroux afirmă că ,,faptul matematic, este independent de veşmîntul logic sau algebric sub care noi încercăm să-l reprezentăm... Expresia unui fapt este arbitrară, convenţională, pe cînd faptul matematic, adică adevărul pe care îl conţine, se impune spiritului nostru în afară de orice convenţie. Atîta timp cît vedem în formule algebrice şi combinaţii logice însăşi obiectele matematice, nu putem justifica dezvoltarea teoriilor matematice, căci toate categoriile, utilizate

[20] R. Wavre, *Y a-t-il une crise des mathématique?*, Revue de Métaphysique et de Morale, 31, 1924, p. 348.

în aceste teorii, pot fi explicate numai dacă admitem că algebra și propozițiile logice nu sînt decît limbajul în care *traducem* o mulțime de noțiuni și de fapte obiective" [21]. R. Wavre subscrie acestui punct de vedere, adăugînd că „O construcție logică a matematicii, independentă de intuiția matematică, este imposibilă după Brouwer, deoarece s-ar obține astfel doar o construcție verbală, străină de matematică; în plus, ea ar constitui un cerc vicios, căci *logica se bazează ea însăși pe intuiția fundamentală a matematicii*" [22], ceea ce corespunde primelor trei teze intuiționiste.

Pe de altă parte, chiar dacă s-ar admite o astfel de „construcție logică a matematicii", nu trebuie uitat că logica obișnuită este universal valabilă numai în domeniul colecțiilor finite *determinate* în spațiu și timp.

Deși Wavre utilizează termenul de „logică empiristă" [23], care sună destul de contradictoriu, el nu înțelege prin aceasta o logică propriu-zisă, ci *suma* unor restricții intuiționiste, de natură *mai mult sau mai puțin* logică. El tratează pe larg problema continuului, ca *Medium des freien Werdens*. Cu această ocazie, ridică și două probleme de „Logică aplicată". Una dintre ele se referă la valoarea legii terțului exclus, pe care o enunță în această formă: „Oare o propoziție perfect clară trebuie să fie proclamată adevărată sau falsă *a priori*, chiar dacă nu există nici un mijloc de a demonstra adevărul sau falsitatea ei?" [24] Wavre justifică punctul de vedere intuiționist cu exemple matematice, deși atinge în treacăt și aspectul istoric al problemei (problema viitorilor contingenți la Aristotel). A doua problemă este legată de *axioma comprehensiunii* a lui Zermelo, care, continuă Wavre, „...exprimă faptul că o definiție în comprehensiune este echivalentă cu o definiție în extensiune". Este vorba de identificarea logicistă a existenței efective cu definiția corectă. „Este oare de ajuns să definim corect un obiect x printr-o proprietate A pentru ca obiectul x să existe efectiv?"

Wavre tratează pe larg probleme referitoare în special la teza intuiționistă (IV).

El pune cu această ocazie problema legitimității propozițiilor de existență, de tipul $(\exists x) F(x)$ = „există un obiect cu proprietatea F", care, din punct de vedere logicist, trebuie să fie adevărate sau false. El

[21] P. Boutroux, *L'idéal scientifique des mathématiciens*, Paris, 1920, p. 170.

[22] R. Wavre, *op. cit.*, p. 440.

[23] *Cf.* R. Wavre, *Logique formelle et logique empiriste*, Revue de Métaphisique et de Morale, 33, 1926.

[24] R. Wavre, *Sur le principe du tiers exclu*, Revue de Métaphysique et de Morale, 33, 1926, p. 428.

adoptă aici propoziția lui H. Weyl, după care, sînt valabile numai judecățile în care este atribuit un predicat determinat unui subiect determinat, adică acele judecăți care presupun, intuiționistic vorbind, existența unei modalități prin care poate fi obținut *efectiv* obiectul în discuție. Un cec cu indicația „Există o bancă de la care puteți ridica suma de 1 000 £" nu are nici o valoare. Existența *ideală*, afirmă Wavre, nu este decît o fereastră falsă deschisă de către logicist pentru a obține o simetrie între propozițiile logice și faptele matematice.

„Logica empiristă" a lui Wavre se dovedește astfel a fi mai degrabă o sumă de restricții, decît o logică propriu-zisă. Ea nu este o *teorie* opusă celei clasice, ci o *critică* a teoriei clasice.

Trebuie remarcat, cu această ocazie, faptul că admiterea consecventă a primelor patru teze intuiționiste, care antrenează în mod firesc și teza (VI), determină o poziție logică criticistă, neconstructivă, pe cînd admiterea tezei (VI), care nu le presupune însă pe primele patru, îngăduie în schimb construcții logice de tip axiomatic.

F. Gonseth este primul care încearcă să construiască (independent de Kolmogorov) „o altă logică" decît cea clasică. El pornește de la un punct de vedere *fictiv* intuiționist, pe care îl critică. Este vorba de teza, pe care o notăm cu (VI′), presupus intuiționistă, că legea terțului exclus nu ar fi de loc valabilă, deci ar fi falsă, cînd este vorba de categorii infinite [25]. „Eu nu cred, susține Gonseth, că se va renunța la a se spune că *orice* număr întreg este par sau impar, afirmație care în mod sigur are un sens". Pe de altă parte, el constată că „. . . pot să apară anumite mulțimi — care nu sînt cu necesitate infinite — în care, pentru anumite proprietăți, și pentru anumite elemente, să nu fie valabil nici *A* nici non-*A*. . ." Nici una dintre aceste constatări nu contrazice însă teza intuiționistă (VI).

Aceste constatări contrazic doar teza (VI′), pe care o combate Gonseth. Prin aceasta însă nu se obține altceva decît o întărire a tezei intuiționiste (VI), conform căreia *tertium non datur* nu este universal valabil, dar nici fals.

Insistînd asupra unor enunțuri echivalente cu teza (VI), dar ignorînd specificul doctrinei autentic-intuiționiste, concentrat în restul tezelor și în special în primele patru, Gonseth reușește, ca și Kolmogorov, să transforme aspectul critic al teoriei într-un pivot constructiv. Dacă nu este universal valabil faptul că orice propoziție este adevărată sau falsă, atunci, conchide Gonseth, înseamnă că există propoziții

[25] F. Gonseth, *Les fondements des mathématiques*, Paris, 1926, p. 193.

indiferente [26]. Atributul „indiferent”, acordat unei propoziții, nu apare la Brouwer și nu este un concept intuiționist. Într-adevăr, în cazul în care nu este valabilă legea terțului exclus, adică atunci cînd nu se poate decide dacă o propoziție este adevărată sau falsă, înseamnă că nu se poate construi nici un fapt matematic care să corespundă propoziției respective sau să o infirme. Cu alte cuvinte, atît propozițiile adevărate, cît și cele false, sînt verificabile prin construcții matematice, pe cînd presupusele propoziții indiferente nu. Din această cauză, ele nu au nici un statut intuiționist. În plus, dacă se admit astfel de propoziții, atunci, notînd o propoziție adevărată cu p, una falsă cu $\sim p$ și una indiferentă cu p', obținem disjuncția [27]

$$p \vee \sim p \vee p', \tag{1}$$

ceea ce înseamnă că în locul legii terțului exclus va fi valabilă *o lege a quartului exclus.*

O astfel de împărțire a propozițiilor ar avea o semnificație intuiționistă numai în cazul în care ar prezenta vreun interes studiul *general* al propozițiilor. Însă, intuiționistic vorbind, prezintă interes numai propozițiile matematice, propozițiile constructibile. Din această cauză, *matematicianul intuiționist nu va ajunge niciodată la o propoziție indiferentă, căci aceasta nu poate fi construită.*

M. Barzin și **A. Errera** admit un punct de vedere asemănător. Dar ei nu consideră că există propoziții indiferente, care nu ar prezenta nici un interes intuiționist, ci propoziții *terțe*. „A afirma că o propoziție este terță, poate să însemne că este incertă... nimic nu se opune ca o propoziție care astăzi este terță, mîine să devină adevărată sau falsă...” [28] Autorii în discuție recunosc însă faptul că Brouwer nu încearcă „construcția unei propoziții terțe”, că, prin urmare, ar fi vorba numai de *posibilitatea* și nu de existența *efectivă* a propozițiilor terțe. Cu toate acestea, ei vor să demonstreze „...că este imposibil să se raționeze admițînd un terț, fără să se ajungă la o contradicție...” [29]. Aceasta înseamnă că este imposibilă construcția unui sistem intuiționist à la Gonseth (Σ_{Go}).

[26] *Ibidem*, p. 225.
[27] *Loc. cit.*
[28] M. Barzin et A. Errera, *Sur la logique de M. Brouwer*, Bulletin de la Classe de Sciences de l'Académie royale de Belgique, 1927, p. 59.
[29] *Ibidem*, p. 60.

Autorii demonstrează prin metode clasice propoziția

(2) $$(p \,\&\, q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q),$$

ceea ce înseamnă „falsitatea unei conjuncții presupune falsitatea unuia dintre membrii ei". Apoi pe baza legii quartului exclus, respectiv

(1) $$p \vee \sim p \vee p'$$

ei deduc

(3) $$\sim p = p \vee p'$$

(4) $$\sim q = q \vee q'$$

Dacă (2) nu ar fi adevărată, se raționează în continuare, atunci ar fi adevărată

(2′) $$\sim (p \,\&\, q) \rightarrow (\sim p \,\&\, \sim q).$$

În (2′) sînt înlocuiți apoi $\sim p$ și $\sim q$ cu echivalenții lor din (3) și (4) și se obține

(5) $$\sim (p \,\&\, q) \rightarrow ((p \vee p') \,\&\, (q \vee q'))$$

Pe baza legii $(p \,\&\, q) \rightarrow p$ membrul al doilea ia forma

(6) $$((p \vee p') \,\&\, (q \vee q')) \rightarrow (p \vee p').$$

Dacă la acestea adăugăm

(7) $$\sim p \rightarrow \sim (p \,\&\, q)$$

și combinăm formulele în conformitate cu principiul silogismului obținem

(8) $$\sim p \rightarrow (p \vee p').$$

Trebuie să considerăm că (8) este o formulă absurdă, căci în caz contrar ar fi adevărată (2′) și falsă (2), ceea ce ar încălca legea contradicției.

Dar, din moment ce (8) este absurdă, atunci nu mai este valabilă nici (3), care presupune

$$(9) \qquad (\sim p \rightarrow (p \vee p')) \,\&\, ((p \vee p') \rightarrow \sim p).$$

Dacă nu este valabilă (3) atunci nu este valabilă nici (1), respectiv legea quarţului exclus.

Demonstraţia nu este întru totul riguroasă deoarece operează iniţial cu *variabile* propoziţionale bivalente, în care p de exemplu poate fi adevărat sau fals şi $\sim p$ de asemenea, şi introduce ulterior o *constantă* p', care face ca p să fie adevărat şi $\sim p$ să fie fals. Rezultatul obţinut dovedeşte însă incompatibilitatea logicii bivalente cu cea trivalentă. Mai precis, admiţînd în manieră intuiţionistă valabilitatea principiului noncontradicţiei exprimat prin (2), care, după cum se ştie, nu mai este o tautologie în logica trivalentă, trebuie să respingem *quartum non datur*. Logica intuiţionistă nu poate fi un sistem Σ_{Go}, deoarece admite valabilitatea universală a legii noncontradicţiei.

Într-o lucrare ulterioară [30], autorii, referindu-se la punctul de vedere, enunţat de Alonso Church, conchid „Brouwerienii trebuie deci să se refugieze în a doua alternativă pe care le-o deschide D-nul Church : respingerea terţului exclus fără admiterea propoziţiilor terţe". Este evident că această alternativă este de fapt singura autentic-intuiţionistă. Autorii în discuţie se îndoiesc însă de posibilitatea ei şi încearcă în continuare să demonstreze imposibilitatea admiterii simultane a propoziţiilor terţe şi a legii contradicţiei.

P. Lévy se înscrie iniţial ca un adversar al „logicii empirice" în sensul dat de Wavre. El consideră restricţiile de tip intuiţionist (cum ar fi : „interdicţia de a pune o problemă pe care nu sîntem siguri că o putem rezolva" sau „interdicţia de a vorbi despre un număr pe care nu îl putem calcula) ca fiind restricţii arbitrare [31]. Ulterior [32], el încearcă o interpretare personală pe coordonatele sistemului Σ_{Go}, afirmînd că „logica lui Brouwer", astfel concepută, nu duce la nici o contradicţie.

Fie α un enunţ şi β contrariul său. Spunem că α este adevărat în sensul lui Brouwer, afirmă Lévy, dacă adevărul său poate fi demon-

[30] M. Barzin et A. Errera, *Sur le principe du tiers exclu*, Archives de la Société Belg. de Philosophie, 1929, p. 9 sq.

[31] P. Lévy, *Critique de la logique empirique*, Revue de Métaphysique et de Morale, 33, 1926, p. 551.

[32] *Cf.* P. Lévy, *Logique classique, logique brouwerienne et logique mixte*, Bulletin de la Classe de Sciences de L'Académie royale de Belgique, 1927.

strat. Notăm acest lucru cu $+\alpha$ sau A, de unde $+\alpha = A$, și tot așa $+\beta = B$. Dintre α și β, unul și numai unul este întotdeauna adevărat, pe cînd dintre două enunțuri brouweriene A și B se poate întîmpla ca nici unul să nu fie adevărat. Pe acest temei introduce Lévy a treia valoare. Expunerea este însă extrem de greoaie și confuză. Astfel, după ce s-a stabilit că A este un α adevărat à la Brouwer, iar B un β adevărat, Lévy consideră totuși că α este adevărat în cazul A și fals în cazul B, iar pentru cazul în care nu ar fi nici adevărat nici fals introduce un C ipotetic. Dar, în felul acesta, enunțurile brouweriene sînt identificate cu înseși valorile de adevăr. Deci ar exista o logică clasică, a enunțurilor, și o logică brouweriană, a valorilor acestor enunțuri. Ideea nu apare însă explicit. Însăși starea terță este pusă la îndoială „...nu se poate demonstra, afirmă Lévy, nici imposibilitatea acestei stări, nici existența ei efectivă: trebuie s-o considerăm deci ca pe o simplă posibilitate logică" [33].

S. Avsitdysky completează punctul de vedere susținut de Lévy. El consideră plauzibilă starea terță, deoarece „logica matematică empiristă", spre deosebire de logica formală, pe care el o numește și „a negației sau a adevărului și falsului", nu mai operează cu alternativa adevăr-fals, ci cu *adevărul* și *absurdul*, între care nu mai apare *alternativa* [34]. Adevărul semnifică ceea ce este demonstrabil efectiv; absurdul, ceea ce poate fi redus efectiv la o contradicție. Absurdul implică falsul, dar falsul nu implică întotdeauna absurdul. Din acestea rezultă că „logica matematică empiristă" introduce nuanțări ale valorilor de adevăr. Mai precis, nuanțează falsul. O propoziție este terță, dacă nu mai poate fi nici efectiv demonstrată, nici efectiv redusă la absurd. Terțul ar fi deci „un fel de fals" care nu este însă absurd. Urmărind în continuare astfel de subtilități, autorul ajunge să distingă *două* tipuri de propoziții terțe: unele a căror „terțialitate" poate fi demonstrată și altele a căror „terțialitate" nu poate fi demonstrată niciodată [35].

M. V. Glivenko este primul care respinge categoric introducerea propozițiilor terțe în „logica lui Brouwer", invocînd motivul că introdu-

[33] *Ibidem*, p. 259.
[34] S. Avsitdysky, *Note relative au travail de M. Barzin et A. Errera „Sur la logique de M. Brouwer"*, Bulletin de la Classe de Sciences de l'Académie royale de Belgique, 1927, p. 724.
[35] *Ibidem*, p. 725.

cerea lor este la fel de ilegitimă în acest caz, ca şi în cazul logicii clasice [36]. Abandonînd această pistă dificilă, Glivenko elaborează un al doilea sistem axiomatic intuiţionist, pe care îl notăm Σ_{Gl}. Sistemul conţine următoarele axiome :

(A_1) $p \to p,$

(A_2) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)),$

(A_3) $(p \,\&\, q) \to p,$

(A_4) $(p \,\&\, q) \to q$

(A_5) $(r \to p) \to ((r \to q) \to (r \to (p \,\&\, q)),$

(A_6) $p \to (p \vee q),$

(A_7) $q \to (p \vee q),$

(A_8) $(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)),$

(A_9) $(p \to q) \to ((p \to \sim q) \to \sim p),$

(A_{10}) $(p \to \sim q) \to (q \to \sim p),$

(A_{11}) $(p \to q) \to (\sim q \to \sim p).$

Glivenko nu-şi pune problema calităţilor formale ale sistemului. Din această cauză, într-un studiu ulterior [37] mai adaugă patru axiome şi anume :

(A_{12}) $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r)),$

(A_{13}) $(p \to (p \to r)) \to (p \to r),$

(A_{14}) $p \to (q \to p),$

(A_{15}) $\sim q \to (q \to p).$

[36] M. V. Glivenko, *Sur la logique de M. Brouwer*, Bulletin de la Classe de Sciences de l'Académie royale de Belgique, 1928, p. 225.

[37] M. V. Glivenko, *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer*, Bulletin de la Classe de Sciences de l'Academie royale de Belgique, 1929, p. 184.

Ca şi Kolmogorov, Glivenko îşi pune problema raportului dintre Σ_{Gl} şi un eventual sistem clasic Σ_C. El ajunge la concluzia că singura deosebire dintre Σ_{Gl} şi Σ_C, ar fi introducerea în Σ_{Gl} a unei noi axiome care să conţină terțul exclus, respectiv

$$(A_{16}) \qquad p \vee \sim p$$

Deci regulile ar fi următoarele:

$$\Sigma_C = \Sigma_{Gl} + A_{16},$$
$$\Sigma_{Gl} = \Sigma_C - A_{16}.$$

La acestea Glivenko adaugă următoarele observații:
(1) Dacă o anumită expresie din logica propozițiilor este demonstrabilă în Σ_C, atunci falsitatea falsității acestei expresii este demonstrabilă în Σ_{Gl}. (2) Dacă falsitatea unei anumite expresii din logica propozițiilor este demonstrabilă în Σ_C, aceeaşi falsitate este demonstrabilă în Σ_{Gl}. Glivenko demonstrează de exemplu teorema

$$(T_1) \qquad \sim(\sim(\sim p \vee p)),$$

care înseamnă: „Propoziţia «propoziţia $(\sim p \vee p)$ este falsă» este falsă", ceea ce ar însemna că, din punct de vedere intuiționist, legea terţului exclus nu este considerată falsă; sau

$$(T_2) \qquad \sim(\sim(\sim q)) \rightarrow \sim q,$$

care înseamnă „Falsitatea falsității unei propoziții false q implică falsitatea propoziției q".

Sistemul Σ_{Gl}, o dată construit, urma să fie perfecționat şi extins la calculul cu predicate.

Este demn de remarcat faptul că Glivenko lucrează strict formalistic. El nu încearcă să justifice în nici un fel admiterea sau nu a axiomei care conține *tertium non datur*. Nu-l interesează în nici un fel semnificaţia intuiţionistă a formelor logico-matematice, şi nici limitele utilizării metodei axiomatice. Logica lui este, mai mult decît aceea a lui Kolmogorov, o logică fundamentată numai pe teza intuiţionistă (VI). Demonstrînd că este falsă afirmaţia că legea terţului exclus este falsă, Glivenko a reuşit într-adevăr să impună tendința axiomatică a logicii intuiţioniste.

Pînă în acest moment, se poate conchide că iniţial au existat două tendinţe de fundamentare a unei logici intuiţioniste: una, care porneşte de la tezele intuiţioniste (I), (II), (III) şi (IV) şi alta, care ia

drept fundament teza (VI). Prima tendință s-a dovedit fără implicații deosebite în privința aspectului sistematic, extensiv al logicii, dar profundă prin reflexiile sale de conținut. A doua tendință a determinat două direcții, la fel de îndreptățite, care se îndepărtează însă, tocmai datorită ignorării celorlalte teze, de doctrina intuiționistă propriu-zisă. Ieșirea din cadrul bivalent al logicii se bazează într-adevăr numai pe încercarea de a construi o logică în care *tertium non datur* să nu mai fie o tautologie, iar excluderea axiomelor de forma lui *tertium non datur* sau *duplex negatio* are același fundament, deși consecințele sînt numai axiomatice.

Problema care rămînea deschisă era aceea de a încerca construcția unei logici în conformitate cu ambele tendințe, deci fundamentată pe ansamblul tezelor intuiționiste.

Sistemul axiomatic al lui A. Heyting

Spre deosebire de autorii menționați, care au încercat construcția unei logici intuiționiste fără a fi matematicieni intuiționiști, deci oarecum din afara intuiționismului (restrîns în acea vreme doar la matematici), Heyting și-a început activitatea științifică cu lucrări de matematică intuiționistă. Ce-i drept, el a mers pe o linie diferită de aceea inaugurată de Brouwer, după care „...aprioritatea timpului nu califică numai proprietățile aritmeticii ca judecăți sintetice *a priori*, ci și pe cele ale geometriei, și nu numai pentru geometria elementară cu două sau trei dimensiuni, ci și pentru geometriile neeuclidiene și *n*-dimensionale"[38]. Primii intuiționiști (B. de Loor și M. J. Belinfante), adoptînd acest punct de vedere, s-au interesat în mod consecvent numai de probleme aritmetice și algebrice, considerînd că, o dată cu acestea, sînt rezolvate și problemele geometriei. „De la Descartes am învățat, spunea Brouwer, să reducem toate geometriile la aritmetică prin intermediul calculelor de coordonate"[39]. Heyting inaugurează totuși o interpretare intuiționistă a *geometriei proiective*. Pe această linie, el ajunge în mod natural la problema *axiomatizării intuiționiste* a geometriei[40] și în genere la problema unui sistem axiomatic de tip intuiționist, ceea ce nu intra în preocupările celorlalți intuiționiști.

[38] L. E. J. Brouwer, *Intuitionism and formalism*, Bull. Amer. Math. Soc., 20, 1913, p. 86.

[39] Brouwer, *loc. cit.*

[40] A. Heyting, *Intuitionistische Axiomatiek der projective Meetkunde*, Groningen, 1925.

Din această cauză, în cursul dezbaterilor privind logica intuiționistă Heyting optează pentru varianta axiomatică a lui Glivenko, dar, în calitate de matematician intuiționist, nu poate fi întru totul satisfăcut de aspectele evident formaliste legate de Σ_{Gl}. El revine asupra aspectelor de conținut propuse de P. Lévy [41]. Cu alte cuvinte, încearcă o extindere a fundamentelor logicii intuiționiste, de la aspectele pur formale pe care le implică teza (VI) la aspectele de conținut pe care le implică primele patru teze. El insistă asupra specificului intuiționist al afirmației, negației și demonstrabilității matematice, care nu pot fi înglobate într-o descriere pur formalistă a logicii.

Din această cauză, Heyting, înainte de a trece la expunerea a ceea ce se numește de regulă „logica intuiționistă", respectiv a sistemului Σ_{Hy}, se simte dator să facă cîteva precizări [42]. El începe prin a aminti faptul că „Matematica intuiționistă este o activitate a gîndirii pentru care orice limbaj, chiar și cel formalist, nu este decît un mijloc auxiliar de comunicare. În principiu, continuă el, este imposibilă construcția unui sistem formal care să fie echivalent cu matematica intuiționistă, căci posibilitățile gîndirii nu pot fi reduse la un număr finit de reguli stabilite în prealabil". Această remarcă este în perfectă concordanță cu primele trei teze intuiționiste. În plus, adaugă Heyting, pentru reconstrucția matematicii nu este necesară stabilirea unor legi logice universal valabile, căci aceste legi sînt redescoperite în fiecare caz particular ca fiind valabile sau nu în funcție de domeniul în care se lucrează, ceea ce amintește de conținutul tezei (IV).

Încercarea de a reda, într-un limbaj formalizat, cele mai importante părți ale matematicii, consideră Heyting, nu ar avea alt scop decît acela de a profita de avantajele evidente ale simbolismului față de limbajul uzual. Cu toate acestea, Heyting construiește un sistem, pe care el însuși îl numește formalist *(ein formalistisches System)*, pornind nu de la fundamentele intuiționiste, respectiv de la matematica intuiționistă și de la tezele pe care aceasta le implică, ci de la rezultatele obținute în prealabil de către Glivenko.

Una dintre particularitățile inițiale ale sistemului Σ_{Hy} o constituie faptul că constantele și variabilele (notate cu a, b, c, ...), spre deosebire de cele obișnuite, desemnează numai *propoziții matematice*. În locul semnelor obișnuite pentru operațiile logice, respectiv ($\sim$, $\rightarrow$,

[41] A. Heyting, *Sur la logique intuitionniste*, Bull. Acad. Sc. Belg., 1930, p. 957.

[42] *Vide* A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, 1930, p. 42.

&, V), Heyting introduce semnele $\neg$, $\supset$, $\wedge$, $\vee$. El sugerează faptul că operaţiile respective au altă semnificaţie decît cea formalistă. În primul rînd, ele nu pot fi definite unele prin altele [43]. Formulele următoare sînt corecte, dar conversele lor nu:

(4.46) $(\neg a \vee b) \supset (a \supset b)$.

(4.9) $(a \supset b) \supset \neg (a \wedge \neg b)$.

(4.47) $(a \vee b) \supset (\neg a \supset b)$.

(4.91) $(a \vee b) \supset \neg(\neg a \wedge \neg b)$.

(3.6) $(a \vee b) \supset ((a \supset b) \supset b)$.

(4.91) $(a \wedge b) \supset \neg (\neg a \vee \neg b)$.

Heyting insistă în special asupra formei $(a \supset b)$, care semnifică „dacă a este corect, atunci şi b este corect". Asupra semnificaţiei operatorilor va reveni însă ulterior [44]. În locul parantezelor Heyting utilizează puncte, iar pentru echivalenţă foloseşte semnul implicaţiei reciproce ($\supset \subset$). Teoremele sînt precedate de semnul „$\vdash$", iar axiomele de semnele „$\vdash \vdash$".

Axiomele sistemului Σ_{Hy}, transcrise cu paranteze, sînt:

($\mathbf{A}_{2.1}$) $\vdash\vdash a \supset (a \wedge a)$.

($\mathbf{A}_{2.11}$) $\vdash\vdash (a \wedge b) \supset (b \wedge a)$.

($\mathbf{A}_{2.12}$) $\vdash\vdash (a \supset b) \supset ((a \wedge c) \supset (b \wedge c))$.

($\mathbf{A}_{2.13}$) $\vdash\vdash ((a \supset b) \wedge (b \supset c)) \supset (a \supset c)$.

($\mathbf{A}_{2.14}$) $\vdash\vdash b \supset (a \supset b)$.

($\mathbf{A}_{2.15}$) $\vdash\vdash (a \wedge (a \supset b)) \supset b$.

($\mathbf{A}_{3.1}$) $\vdash\vdash a \supset (a \vee b)$.

($\mathbf{A}_{3.11}$) $\vdash\vdash (a \vee b) \supset (b \vee a)$.

($\mathbf{A}_{3.12}$) $\vdash\vdash ((a \supset c) \wedge (b \supset c)) \supset ((a \vee b) \supset c)$.

($\mathbf{A}_{4.1}$) $\vdash\vdash \neg a \supset (a \supset b)$.

($\mathbf{A}_{4.11}$) $\vdash\vdash ((a \supset b) \wedge (a \supset \neg b)) \supset \neg a$.

[43] *Ibidem*, p. 44.

[44] *Vide e. g.*: A. Heyting, *Les fondements des mathématiques*, Paris, Lovain, 1955, p. 16—17 şi A. Heyting, *Intuitionism. An introduction*, Amsterdam, 1966, p. 98 — 99.

Heyting demonstrează *independența* axiomelor utilizînd metoda lui P. Bernays. Pentru aceasta, el caută mai întîi *elementele matematice*, cum ar fi numerele întregi pozitive, pe care le grupează. Aceste elemente devin apoi valorile unor *matrici arbitrare*. Se arată că, pe baza acestor matrici arbitrare, una dintre axiome nu obține aceeași valoare constantă pe care o obțin toate celelalte.

Pentru a demonstra independența axiomei ($A_{2.1}$), Heyting alege ca elemente cifrele : 0, 1, 2 și alcătuiește următoarele matrici arbitrare :

(I)

$\supset$	0	1	2	$\wedge$	0	1	2	$\vee$	0	1	2	$\neg$	0	1	2
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0		1	0	1
1	2	0	2	1	1	1	1	1	0	1	2				
2	2	0	0	2	1	1	1	2	0	2	2				

Pentru a demonstra independența axiomei ($A_{2.14}$) alege *aceleași* elemente, dar alte matrici arbitrare, și anume :

(V)

$\supset$	0	1	2	$\wedge$	0	1	2	$\vee$	0	1	2	$\neg$	0	1	2
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0				
2	1	0	1	2	0	1	0	2	0	0	0				

Pentru axioma ($A_{2.11}$) alege ca elemente pe 0 și toate numerele întregi pozitive; pentru ($A_{2.12}$) alege pe 0 plus toate numerele întregi pozitive și negative ș.a.m.d.

Prin aceeași metodă, alegînd elementele 0, 1, 2 și matricele arbitrare :

(XII)

$\supset$	0	1	2	$\wedge$	0	1	2	$\vee$	0	1	2	$\neg$	0	1	2
0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0		1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	2				
2	2	0	0	2	2	1	2	2	0	2	2				

Se poate arăta că expresia $\neg \neg a \supset a$ este independentă de *toate* axiomele alese.

Dacă transcriem semnele sistemului Σ_{Hy} în semnele sistemului Σ_C, astfel:

$$\supset, \vee, \wedge, \neg$$

$$\rightarrow, \mathbf{V}, \&, \sim$$

atunci constatăm că expresia $\neg\neg a \supset a$ devine $\sim\sim a \rightarrow a$, care *seamănă* cu formularea dublei negaţii ($\sim\sim p \rightarrow p$). Ele nu sînt însă identice, deoarece $a \neq p$. Numai făcînd abstracţie de acest lucru s-ar putea considera că Σ_C ar putea fi obţinut din Σ_{Hy} + *negatio duplex*. În plus, transcrierea constantelor de mai sus nu este admisibilă din punct de vedere intuiţionist.

Heyting admite cele două observaţii ale lui Glivenko. Acestea iau forma: (1′) Dacă o propoziţie a este demonstrabilă în Σ_C, atunci propoziţia „a nu poate să fie falsă'' este demonstrabilă în Σ_{Hy}. (2′) Dacă propoziţia „a este falsă'' este demonstrabilă în Σ_C, este demonstrabilă şi în Σ_{Hy}.

În maniera lui Glivenko, Heyting demonstrează teze ale calculului propoziţional, printre care şi următoarele:

(4.3) $\vdash a \supset \neg\neg a.$

(4.31) $\vdash \neg a \supset \neg\neg\neg a.$

(4.32) $\vdash \neg\neg\neg a \supset \neg a.$

(4.45) $\vdash (a \vee \neg a) \supset (\neg\neg a \supset a).$

(4.8) $\vdash \neg\neg(a \vee \neg a).$

(4.31) $\vdash \neg\neg(\neg\neg a \supset a).$

Prima ilustrează o lege a logicii formaliste, a cărei conversă nu e valabilă în Σ_{Hy}, iar ultimele două ilustrează observaţia (1′), adică: fiind demonstrabilă în Σ_C teza $(a \vee \neg a)$ în Σ_{Hy} este demonstrată imposibilitatea falsităţii ei, respectiv

(4.8) $\neg\neg(a \vee \neg a).$

Heyting încearcă și construcția unui sistem formalist pentru calculul cu predicate. Sistemul inițial este foarte complicat [45]. Heyting însuși renunță la varianta inițială și adoptă ulterior metoda lui Hilbert și Ackermann [46], care constă în adăugarea la sistemul de calcul propozițional a următoarelor formule:

$$(H_1) \qquad (\forall x)\, a(x) \supset a(y),$$

$$(H_2) \qquad a(y) \supset (\exists x)\, a(x).$$

Procedeul deductiv este acela obișnuit în calculele formaliste. Conform restricțiilor axiomatice, nici în calculul cu predicate nu vor apărea teoreme de forma lui *tertium non datur* sau *duplex negatio*. Heyting insistă asupra următoarelor formule:

$$(H_3) \qquad (\exists x)\, a \supset \neg (\forall x) \neg a,$$

$$(H_4) \qquad (\forall x)\, a \supset \neg (\exists x) \neg a,$$

$$(H_5) \qquad (\exists x) \neg a \supset \neg (\forall x)\, a,$$

$$(H_6) \qquad (\exists x) \neg \neg a \supset \neg \neg (\exists x)\, a,$$

$$(H_7) \qquad \neg \neg (\forall x)\, a \supset (\forall x) \neg \neg a,$$

care sînt valabile intuiționistic, în timp ce conversele lor nu mai sînt valabile; ceea ce implică restricții serioase pentru obținerea echivalențelor între formulele cuantificate.

După obținerea celor două calcule, Heyting încearcă aplicarea lor la matematica intuiționistă, prin introducerea unor semne speciale corespunzătoare conceptelor intuiționiste de „specie" și „succesiune de alegeri" [47].

[45] *Vide* A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik*, II, Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, 1930, pp. 57—71.

[46] A. Heyting, *Les fondements des mathématiques*, p. 21.

[47] A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik*, III, Sitzungsberichte..., 1930, p. 160.



Elaborarea sistemului Σ_{Hy}, în ciuda faptului că acesta a fost şi mai continuă încă să fie numit „logica intuiţionistă”, nu a determinat încheierea discuţiilor în legătură cu această logică. Dimpotrivă, se poate spune că a înviorat disputele oferind noi subiecte de discuţie.

Conform previziunii lui Baldus, Σ_{Hy} a fost „adoptat” de către formalişti drept o simplă variantă de sistem axiomatic, făcîndu-se bineînţeles abstracţie de consideraţiile *neformale*, de natură intuiţionistă, pe care Heyting le-a făcut *pe marginea* sistemului. Atitudinea formaliştilor a fost îndreptăţită. Într-adevăr, consideraţiile intuiţioniste, nefiind de ordin formal, nu pot fi încadrate în sistem, ceea ce înseamnă că sistemul este independent de acestea. Faptul că o serie de formule, ca *tertium non datur*, nu sînt deductibile în Σ_{Hy}, nu îndreptăţeşte cu nimic, după cum observă A. Schmidt, atributul de „intuiţionist”, căci cauza este de natură pur formalistă, respectiv o *restricţie axiomatică*. În acest sens, formaliştii înşişi au construit o mulţime de sisteme restrictive, dintre care multe sînt analoage cu Σ_{Hy}.

La aceasta se adaugă şi faptul că, pornind de la aceleaşi principii ca şi Heyting, chiar intuiţioniştii au trecut la elaborarea „în serie” a sistemelor „intuiţioniste”, ceea ce dovedeşte caracterul arbitrar al punctului de plecare. Σ_{Hy}, ca şi întreaga serie de sisteme analoage, a rămas *fără o interpretare precisă* (deşi iniţial trebuia să fie o logică a matematicii intuiţioniste). Or, aceasta — lipsa unei „interpretări precise — este o caracteristică proprie sistemelor formaliste în genere.

Toate acestea dovedesc faptul incontestabil că, deşi Heyting era matematician intuiţionist şi a înţeles că fundamentele logicii intuiţioniste nu pot fi reduse doar la satisfacerea cerinţelor pe care le presupune teza intuiţionistă (VI), a elaborat un *sistem formalist* ale cărui *fundamente* pot fi la rîndul lor *formaliste*. Într-adevăr, teza (VI) poate fi completată cu teze *contrare* celorlalte teze intuiţioniste cum ar fi : (I′) Matematica nu este independentă de limbaj ; (II′) Obiectul matematicii îl constituie construcţiile lingvistice sau (VII′) Axiomatizarea este o metodă de construcţie a teoriilor matematice. Cu alte cuvinte, în ciuda faptului că este respectată teza (VI), în contextul sistemului formalistic Σ_{Hy}, se poate ajunge la concluzia că nu matematica intuiţionistă determină fundamentele logicii intuiţioniste, ci invers. Ceea ce ar rămîne de făcut, după expresia lui Baldus, ar fi încercarea de „a extinde demonstraţia lipsei de contradicţie a lui Hilbert pe spezele intuiţionismului”.

Heyting însuşi şi-a dat seama de acest pericol, iar în ultimele sale lucrări a devenit un adversar declarat al consecinţelor formaliste

pe care le-a determinat elaborarea propriului său sistem ; un adversar declarat în special al tezei (VII'). Contribuțiile sale în această direcție sînt remarcabile însă lipsite de eficacitate, din cauza faptului că sînt imposibil de redat în context axiomatic.

Tot Heyting a fost inițiatorul interpretărilor intuiționiste ale propriului său sistem. Viciul acestor interpretări rezidă în faptul că se urmărește tocmai calea *inversă*, adică se pornește de la Σ_{Hy} *către* matematica intuiționistă. Dar drumul de la logică spre matematici ține de maniera logicist-formalistă și poate să ducă, ceea ce s-a și întîmplat, la încercări de fundamentare logico-formalistă a matematicii intuiționiste. În cazul în care nu se ajunge atît de departe, se obțin rezultate minime, destul de discutabile din punct de vedere intuiționist. Aceasta, datorită faptului că interpretările nu corespund simultan celor șapte teze intuiționiste. Lucrul este și firesc, din moment ce Σ_{Hy} a fost elaborat pe baza *unei singure* teze.

O altă dificultate serioasă este legată de interpretarea *celorlalte* sisteme „intuiționiste", dintre care majoritatea au fost elaborate în mod analog cu Σ_{Hy}, fiind totuși *diferite* de acesta. Dacă punctul de plecare îl constituie obținerea arbitrară a sistemelor și dacă acestea prin interpretare oferă aceleași avantaje ca Σ_{Hy}, atunci dispare orice criteriu intuiționist de apreciere a valorii lor.

Pentru a evita toate aceste dificultăți există o singură cale și anume aceea de a încerca fundamentarea unei *teorii logice generale* care să corespundă *da capo* celor șapte teze intuiționiste. Dar nu numai *teoria logică* trebuie să corespundă acestor teze, ci și *metoda ei de construcție*.

Pentru ca *obiectul* teoriei logice să-l constituie *limbajul matematic*, nu trebuie să se pornească de la construcția unui *limbaj simbolic* care să fie *ulterior interpretat* matematic, ci de la matematica însăși către propriul ei limbaj, în conformitate cu primele trei teze intuiționiste. Pentru ca teoria logică să fie necontradictorie, nu trebuie să se pornească de la construcția arbitrară a unei teorii logice necontradictorii, ci de la matematica intuiționistă, în care este imposibilă apariția contradicțiilor. În felul acesta, teoria logică va fi în același timp *corespunzătoare* matematicii intuiționiste, avînd ca obiect tocmai limbajul acesteia, și va fi totodată *necontradictorie*, în conformitate cu tezele (IV) și (V).

Pentru ca anumite legi logice, principii sau metode să nu fie utilizate în teoria logicii intuiționiste, nu este necesară respingerea lor *a priori*, căci însăși apariția lor în cadrul teoriei (ca legi universal

valabile) este imposibilă. Într-adevăr, din moment ce în matematica intuiționistă nu se raționează pe baza acestor legi, nici expresia lingvistică a raționamentelor intuiționiste nu le va conține.

În fine, conform tezei (VII), axiomatizările (de tipul Σ_{Hy}) nu pot fi admise drept metode *de construcție* a teoriei logice intuiționiste, deoarece aceasta are ca obiect limbajul matematic. Este necesară *în prealabil* construcția *intuitivă a teoriei*, axiomatizarea avînd doar rolul de-a o *descrie* și de-a o *sistematiza*.

Pe această cale se poate obține o teorie logică fără nici un echivoc, o *logică a matematicii intuiționiste*, pentru care ar fi greșită orice altă interpretare. Față de o astfel de teorie vor exista și criterii precise de apreciere a eventualelor sisteme axiomatice.

Din acest punct de vedere, se poate conchide că Σ_{Hy}, în ciuda intențiilor intuiționiste ale lui Heyting, nu constituie o logică a matematicii intuiționiste, ci doar o continuare a tendinței formaliste inițiată de Kolmogorov și Glivenko. Elaborarea prealabilă a unei teorii logice intuiționiste ține mai degrabă de cealaltă tendință inaugurată de Wavre și Lévy, tendință temporar abandonată tocmai din cauza succesului formalistic al primei tendințe. În acest sens, s-ar putea spune că Σ_{Hy}, prin prestigiul dobîndit, a reprezentat chiar o piedică în fundamentarea propriu-zisă a logicii intuiționiste. Aceasta nu l-a împiedicat însă pe A. Heyting, autorul sistemului, să aibă contribuții importante, care vor fi menționate în continuare, pe linia dezvoltării comprehensive a logicii intuiționiste. Legătura însă, dintre aceste contribuții și propriul său sistem, a rămas de cele mai multe ori în suspensie. Pe de altă parte, nu trebuie uitat nici faptul că tendința comprehensivistă era și ea limitată, mărginindu-se, la aplicarea primelor teze intuiționiste într-o manieră cu totul generală, fără referințe directe la matematica intuiționistă și ignorînd aspectele sistematice, pe care le relativizează într-adevăr teza (VII), dar în nici un caz nu le exclude.

Logica intuiționistă, în calitate de *teorie* generală nu se poate mărgini deci nici la simpla descriere formală, lingvistică a matematicii intuiționiste și nici la un simplu sistem formalist, axiomatic. Ea trebuie să fie în concordanță cu *toate* tezele intuiționiste. Mai mult, înăși construcția ei găsindu-și fundamentele în aceste teze, ele trebuie să-i fie *imanente*. Dar tezele intuiționiste în discuție nu sînt altceva decît consecințe directe ale matematicii intuiționiste. Dacă matematica intuiționistă va constitui baza reală a unei teorii logice, atunci, *implicit*, tezele intuiționiste, în ansamblul lor, vor constitui *funda-*

mentele logice şi metodologice ale acestei teorii. Altfel, rupte de matematica intuiţionistă, ele apar drept simple restricţii arbitrare, care pot fi tratate izolat şi, aşa cum s-a observat deja, pot fi încadrate uşor în contexte formaliste.

Trebuie menţionat faptul că în opera lui Brouwer, deşi acesta nu a încercat niciodată, în mod efectiv, construcţia unei logici, se găsesc multe elemente deosebit de importante pentru fundamentele logicii intuiţioniste. Indicaţii metodologice preţioase în legătură cu raportul dintre matematica pură şi logica *acestei* matematici, cît şi cu logica simbolică în genere. La explicitarea unora dintre aceste indicaţii a contribuit în mod substanţial şi A. Heyting. Ele vor constitui, şi în acest cadru, punctul de plecare al cercetării.

III. LOGICA MATEMATICII INTUIȚIONISTE (TEORIA INTUITIVĂ)

a) *Repere brouweriene*

Brouwer este primul care a studiat în mod sistematic raportul dintre matematică şi logica simbolică, pe care o numeşte de regulă logistică. Făcînd distincţie, după cum s-a menţionat deja, între matematică şi limbajul matematic, el consideră că ultimul apare numai pe o anumită treaptă din dezvoltarea matematicii, care ar trece prin mai multe „stadii" [48].

Primul stadiu, consideră Brouwer, îl constituie creaţia pură, intuitivă a sistemelor matematice. Ea este în fond aplicată şi experimentată în viaţa de toate zilele. Problema o constituie sistematizarea experienţelor cotidiene. Acest lucru nu poate fi însă efectuat de către un singur om. Este necesară comunicarea rezultatelor obţinute. *Al doilea stadiu* îl constituie „paralela lingvistică a matematicii: vorbirea şi scrierea matematică". S-ar putea considera că a fost imposibilă o evoluţie alingvistică a matematicii, că ea a avut loc în procesul general al evoluţiei umane, care presupune şi evoluţia limbajului în genere şi a celui matematic în special. Lucrurile nu stau însă tocmai aşa. Limbajul matematic a apărut totuşi mai tîrziu decît cel obişnuit. Multe activităţi de tip matematic au fost efectuate iniţial şi sînt încă efectuate la fel, fără conştiinţa lor matematică, ceea ce face imposibilă comunicarea. Cu toate acestea, se poate considera că stadiul „lingvistic" al matematicii a apărut totuşi cu mult înainte de creaţia intuitivă a *sistemelor* matematice. Istoria matematicii şi studiul civilizaţiilor primitive dovedesc faptul incontestabil că limbajul matematic scris, mai precis *scrijelat* a fost anterior celui vorbit. Apoi limbajul matematic vorbit a fost din nou înlocuit cu unul scris,

[48] *Cf.* Brouwer, *Over de grondslagen...*, pp. 173—175.

ajungîndu-se astăzi la imposibilitatea practică a matematicienilor de a mai comunica operaţii complexe prin voce.

Al treilea stadiu de dezvoltare a matematicii este unul lingvistic. Acum limbajul devine el însuşi obiect de studiu. Este vorba totuşi de o „cercetare matematică a limbajului". Mai precis, acum are loc dezvoltarea matematicii favorizată de introducerea semnelor hieroglifice, care simplifică şi sistematizează activitatea pur matematică. „Construcţiile lingvistice sînt aici însoţitoarele lingvistice ale construcţiilor matematice". În acest stadiu apare posibilitatea construcţiilor lingvistice pe baza unor principii logice.

În stadiul patru apare logistica, drept sistem abstract în care nu mai contează semnificaţia principiilor logice descoperite în stadiul anterior. Acesta poate fi considerat drept un sistem matematic de *ordinul doi*, care coincide cu o logică matematică neformalizată. *Stadiul cinci* reprezintă introducerea limbajului *simbolic*, deci constituirea propriu-zisă a logicii matematice sau studiul simbolic al matematicii de ordinul doi (Peano, Russell). *Stadiul şase* reprezintă studiul *matematic* al limbajului simbolic (Hilbert). Apare deci o matematică de *ordinul trei*. *Stadiul şapte* ar însemna introducerea unui *simbolism* în care să se facă abstracţie de semnificaţia matematicii de ordinul trei. *Stadiul opt* ar însemna studiul *matematic* al limbajului simbolic care face abstracţie de semnificaţia matematicii de ordinul trei, ceea ce ar constitui o matematică de *ordinul patru* ş.a.m.d.

De aici urmează că singurul stadiu pur al matematicii este primul. El reprezintă matematica propriu-zisă, intuiţionistă. Toate celelalte sînt determinate de cerinţele matematicii pure, care nu depinde însă de nici una dintre acestea. Stadiul doi se dovedeşte indispensabil pentru *comunicarea* şi *memorarea* rezultatelor matematice obţinute. El prezintă deci un *interes practic* pentru intuiţionist. Interesant este, din acest punct de vedere, şi stadiul al treilea, respectiv studiul limbajului matematic, ca *însoţitor* al construcţiilor matematice şi *numai în această calitate*. Acest studiu pune în evidenţă *specificul formelor*, *operaţiilor* şi *principiilor* logice aplicabile în matematică.

Celelalte nivele, consideră Brouwer, nu prezintă interes pentru intuiţionist. Aceasta nu înseamnă că ele trebuie să fie infirmate, ci înseamnă că trebuie să fie „aşezate la locul lor". În primul rînd, matematica pură nu trebuie confundată cu matematica de ordinul doi (cum fac logiciştii) sau cu cea de ordinul trei (cum fac formaliştii). În al doilea rînd, rezultatele obţinute în ordinele superioare ale matematicii nu trebuie socotite rezultate ale matematicii pure. Matematica

pură nu are nimic de cîştigat de pe urma lor. În schimb, logica matematică şi toate celelalte „matematici" nu numai că pornesc de la matematica pură, dar trebuie să revină în permanenţă la ea.

Prin „logică a matematicii intuiţioniste" se vor înţelege deci numai aspectele logice ale stadiilor doi şi trei din dezvoltarea matematicii. Logica matematicii intuiţioniste nu este„o logică a matematicii" în genere. Această ultimă accepţie coincide în cele din urmă cu aceea de logică simbolică, deoarece prin „matematică în genere" se pot înţelege şi „matematicile" de ordin superior.

Aparţinînd stadiilor doi şi trei logica matematicii intuiţioniste este *posterioară* matematicii pure (stadiul întîi).

Ideea că matematica pură este independentă de logică în genere a fost subliniată adesea de către preintuiţionişti. „Există, spunea Poincaré, o realitate mai subtilă, care determină entităţile matematice, şi care este altceva decît logica" [49]. Faptul că logica matematicii în genere presupune matematica pură a fost de asemenea cunoscut [50]. Dar preintuiţioniştii nu aveau încă ideea unei logici a matematicii pure *diferită* de logistică. După schema lui Brouwer, ei au surprins doar raportul dintre stadiul întîi şi stadiul patru.

Analizînd pe larg raportul dintre stadiul întîi şi stadiul doi, Brouwer ajunge la cîteva concluzii demne de menţionat. Conform solipsismului său, el consideră că stadiul întîi, respectiv matematica pură, aparţine subiectului singular, pe cînd stadiul doi (limbaju matematic) este un rezultat al „activităţii oamenilor sociali" [51]. El constă în acel „paralelism matematico-lingvistic" în cadrul căruia fiecărei entităţi matematice îi este coordonat un semn lingvistic. Limbajul matematic poate fi utilizat ulterior şi de către „omul singular", în sprijinul memoriei. Este vorba în special de limbajul scris.

Limbajul în genere este însă lipsit de exactitate şi siguranţă. „Deci, conchide Brouwer, nici pentru matematica pură nu există un limbaj sigur, adică un limbaj care să excludă înţelegerile greşite şi care să ne ferească de erori... „Limbajul se dovedeşte însă (în stadiul trei) obiectul de studiu a ceea ce a fost numit „logica matematicii intuiţioniste". Aceasta înseamnă, după cum va conchide Brouwer,

[49] H. Poincaré, *Science et méthode*, Paris, 1909, p. 133.
[50] *Ibidem*, p. 177.
[51] Brouwer, *Mathematik, Wissenschaft und Sprache*, Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. XXXVI, 1 Haft, 1929, p. 157.

că *logica nu este un instrument absolut sigur* [52], iar matematica trebuie să fie practicată „fără a se recurge la limbaj sau logică" [53].

Cerința lui Brouwer poate fi satisfăcută însă doar de către un subiect singular ideal. Platon avea și el ideea renunțării la limbaj, în special la cel scris. Aceasta pentru întărirea memoriei și a puterii de gîndire. Deprinderea de a comunica rezultatele matematice și de a le utiliza în vederea obținerii altor rezultate face ca limbajul matematic, în speță cel scris, să devină *indispensabil.* Faptul că limbajul acesta poate să ducă la erori este firesc : *errare humanum est.* O demonstrație aritmetică, un calcul, poate fi gîndit ireproșabil, ca act matematic pur, dar expresia lui cifrică poate să ducă la o greșeală care se perpetuează și care duce în cele din urmă la un calcul eronat. În acest caz, se poate vorbi despre o „demonstrație gîndită corect" dar dublată de un „calcul numeric inexact". Littlewood constată că de multe ori o gîndire corectă este exprimată inexact, iar exprimările exacte pot masca concepții greșite [54]. St. Körner menționează, dealtfel, faptul că matematicienii intuiționiști admit și „posibilitatea greșelilor care nu sînt de natură lingvistică" [55]. Acestea, cum este și firesc nu pot fi îndreptate cu mijloace logico-lingvistice. *Ergo*: utilizarea limbajului matematic poate să ducă la erori de exprimare, iar exactitatea limbajului matematic nu constituie garanția unei gîndiri matematice corecte.

Acestea însă nu sînt motive suficiente pentru a se renunța la limbajul matematic și la logica acestui limbaj. În ce privește limbajul pur, deci treapta a doua, Brouwer face unele diferențieri. La început ar fi vorba de un limbaj viu *U* în care este exprimată matematica intuiționistă, apoi de un limbaj *SU* care desemnează simbolizarea limbajului *U* și în fine limbajul *MSU* cu ajutorul căruia se raționează asupra lui *SU*. *MSU* nu trebuie să fie esențialmente diferit de *U* [56].

În privința sistemului simbolic, Heyting adaugă, precizînd punctul de vedere intuiționist, faptul că este imposibilă elaborarea unui *SU* care să descrie *complet* matematica intuiționistă [57].

[52] Brouwer, *Consciousness, philosophy and mathematics*, Proc. X th intern. Congress of Philosophy, Amsterdam, 1948, p. 1243.

[53] *Ibidem*, p. 1244.

[54] *Cf.* J. E. Littlewood, *Varietăți matematice*, Buc., 1969, p. 84.

[55] St. Körner, *Introducere în filozofia matematicii*, Buc., 1965, p. 181.

[56] *Cf.* A. Heyting, *Espace de Hilbert et intuitionnisme*, in „Les Méthodes formelles en axiomatique", Paris, 1953, p. 59.

[57] A. Heyting, *Logique et intuitionnisme*, Actes du 2e colloque intern. de logique math., Paris, 1954, p. 83.

Logica matematicii intuiționiste reprezintă deci studiul limbajului matematic. Conform diferențierilor introduse de Brouwer, ea ar conține trei compartimente: unul ar privi studiul limbajului *U*, altul studiul sistemului lingvistic *SU* și în fine studiul metalimbajului *MSU*, dar acesta coincide esențialmente cu *U*, și nu presupune o logică specială.

Logica matematicii intuiționiste presupune deci problema raportului dintre entitățile matematice și expresiile lor lingvistico-simbolice; apoi studiul relațiilor dintre expresiile lingvistice în funcție de relațiile dintre entitățile matematice și în fine problema principiilor logice în virtutea cărora se poate trece de la anumite relații dintre expresii lingvistice la alte relații asemănătoare.

b) *Entități matematice, constante și variabile*

„Paralelismul matematico-lingvistic" presupune elaborarea unui limbaj, astfel încît, fiecărei entități matematice să-i corespundă un semn lingvistic. Referindu-ne la șirul numerelor naturale, primul pas îl constituie construcția lui intuitivă, pur matematică, respectiv construcția primelor numere. Urmează apoi exprimarea lingvistică *verbală* a numerelor construite: *unu, doi, trei*... Exprimarea *înscris* a acelorași cuvinte poate să fie alfabetică sau hieroglifică. În ultimul caz se obțin chiar cifrele: 1, 2, 3, ... În cazul scrierii alfabetice apar cuvinte scrise intermediare: „unu", „doi", „trei"... Istoric a apărut mai întîi scrierea hieroglifică provenită din scrijelare. Diferența dintre expresiile *in voce* și *in scripto* nu este neglijabilă, nici în genere și nici în matematici. În matematici se poate considera că introducerea hierogliferilor (expresii *in scripto*) a fost chiar esențială pentru dezvoltarea ulterioară. Cu toate acestea, în contextul lucrării de față, diferența nu aduce nimic în plus. Important este aici faptul că *cifrele* (denumite verbal, scrise cu litere sau hierografiate, respectiv 1, 2, 3, . .) nu sînt identice cu *entitățile matematice mentale* pe care le *exprimă*.

Este demn de menționat faptul că, din punct de vedere intuiționist, cifrele simple, ca 1, 2, 3,..., cifrele legate prin semne de operație, ca $1 + 2$, 1×2, sau cifrele care alcătuiesc ceea ce se numește de regulă o propoziție matematică, ca $1 + 2 = 3$, se consideră că exprimă în egală măsură „adevăruri". Aceasta deoarece fiecare dintre ele exprimă rezultate ale „experiențelor prezente și trecute

ale conștiinței" [58]. Adevărul, după Brouwer, nu rezidă în confruntarea unei expresii lingvistice cu un fapt matematic, ci în construcția efectivă a faptului respectiv. În acest sens, cifrele simple, exprimă rezultate ale intuiției, exprimă entități matematice sau „adevăruri", ca și operațiile cu aceste cifre.

Adevărul ține de activitatea matematică propriu-zisă, de construcția intuitivă a entităților matematice. Rolul limbajului matematic este acela de a exprima, *mai mult sau maipuțin exact*, adevărul matematic.

Există, prin urmare, o primă treaptă (a) constituită din entități matematice mentale și operații cu astfel de entități și o treaptă (b) constituită din expresii lingvistice. Notînd cu α_i, β_i, γ_i, ... expresiile lingvistice care desemnează entități determinate și cu α, β, γ,... expresiile lingvistice care desemnează operații determinate cu aceste entități, obținem ceea ce s-ar putea numi *constantele intuiționiste*. α_i, β_i, γ_i, vor fi numite *constante individuale*, iar α, β, γ, ... *constante propoziționale*, cu toate că, din punct de vedere intuiționist, ambele tipuri de constante exprimă „adevăruri" cu același statut existențial.

Situația este evident diferită de aceea obișnuită în logica simbolică, în care este presupusă existența *prealabilă* a obiectelor individuale asupra cărora *ulterior* se operează. În logica obișnuită adevărul apare numai la nivel propozițional, relația dintre un lucru individual și expresia lui nepunînd în joc valoarea de adevăr. Intuiționistic vorbind, adevărul trebuie să fie *anterior* expresiei lingvistice, deci atît constantelor individuale cît și a celor propoziționale.

Nu trebuie uitat, și acesta este un lucru fundamental, că adevărul, în acest caz, este *adevărul matematic*. Dacă nu se admite existența anterioară a adevărului matematic față de expresia lui lingvistică, atunci sînt încălcate primele două teze intuiționiste. Matematica este o activitate independentă de limbaj, dar „obiectele" ei nu sînt date în prealabil, ca existînd undeva, ci se constituie în mintea subiectului creator, în urma unei activități nelingvistice, drept entități matematice și, în același timp, drept adevăruri. Din această cauză, o constantă individuală intuiționistă desemnează, ca și o constantă propozițională *rezultatul unei activități mentale*. Procesul intuitiv prin care este construită entitatea matematică exprimată prin cifra

[58] L. E. J. Brouwer, *Consciousness, philosophy and mathematics*, Proc. Xth intern. Congress of Philosophy, Amsterdam, 1948, p. 1243.

„3" nu este cu nimic mai simplu decît procesul intuitiv prin care este construită operația matematică exprimată prin „$2 + 1 = 3$".

Distincția pe baza valorii de adevăr a constantelor individuale de cele propoziționale nu este de tip intuiționist și nu poate să aibă nici o semnificație intuiționistă. Atît constantele individuale cît și constantele propoziționale *exprimă* în logica intuiționistă adevăruri matematice și *numai* adevăruri matematice, dar ele în sine *nu sînt nici adevărate și nici false.*

Singura modalitate prin care poate fi marcată intuiționistic deosebirea dintre constantele individuale și cele propoziționale o constituie faptul că primele exprimă adevăruri *implicite* sau subînțelese, pe cînd ultimele exprimă aceleași adevăruri în mod *explicit.* Altfel spus, constantele propoziționale exprimă aceleași adevăruri ca și cele individuale, marcînd în plus și *anumite* aspecte legate de procesul *constituirii* acestor adevăruri.

O altă treaptă (c) este aceea a *generalizării* constantelor intuiționiste, respectiv a introducerii unor *semne ale semnelor introduse deja,* deci depășirea „paralelismului lingvistico-matematic", care ține de stadiul al doilea al matematicii. Pe treapta (c) obiectul investigației îl constituie *limbajul matematic* (stadiul al treilea). *Variabila intuiționistă individuală* desemnează *orice* constantă intuiționistă individuală. Cu a_i, de exemplu, putem nota orice număr natural par, cu b_i orice număr natural impar. $a_i + \alpha_i = b_i$ sau $b_i + \alpha_i = a_i$ sînt expresii matematice alcătuite din constante și variabile intuiționiste individuale (în acest caz $\alpha_i = 1$). Variabilele intuiționiste individuale vor fi notate cu $a_i, b_i, c_i, \ldots$ *Variabila intuiționistă propozițională* desemnează orice constantă intuiționistă propozițională (explicită). Aceste variabile vor fi notate cu $a, b, c, \ldots$

Și la acest nivel trebuie marcat specificul intuiționist. Variabila intuiționistă (atît cea individuală cît și cea propozițională) generalizează constantele intuiționiste (individuale sau propoziționale). Luată independent, variabila individuală se citește „oricare ar fi constanta individuală", iar variabila propozițională se citește „oricare ar fi constanta propozițională". Exemplul de mai sus, respectiv $a_i + \alpha_i = b_i$, în care a_i desemnează orice număr par, b_i orice număr impar, iar α_i unitatea, se citește „orice număr par căruia i se adaugă o unitate devine un număr impar.".

Necesitatea introducerii variabilelor implicite este evidentă în raționamentele matematice generale, referitoare la fiecare element

al unei clase de entităţi matematice. Necesitatea variabilelor explicite rezidă în raţionamentele care poartă *asupra* constantelor explicite.

Paralelismul matematico-lingvistic impune transcrierea în simboluri a construcţiilor matematice efective, respectiv a adevărurilor matematice. Pentru fiecare adevăr matematic trebuie utilizată o anumită constantă. În limbajul logicii tradiţionale s-ar putea spune că *toate constantele intuiţioniste sînt adevărate*. Dar acelaşi lucru poate fi spus şi despre variabilele intuiţioniste, deoarece ele generalizează *numai* constantele intuiţioniste, deci numai constante adevărate. Terminologia aceasta nu este însă adecvată punctului de vedere intuiţionist, căci constantele intuiţioniste *nu sînt* adevărate, ci *exprimă* adevăruri ş.a.m.d.

Acest lucru nu se datoreşte însă numai paralelismului lingvistico-matematic, deci conformităţii cu primele teze intuiţioniste, ci şi specificului matematicii intuiţioniste, deci conformităţii cu teza (VI). Dovedindu-se că la nivelul matematicii pure nu mai sînt universal valabile legi ca *tertium non datur* şi *negatio duplex*, care stau la baza demonstraţiilor *indirecte*, acestea din urmă nu mai sînt utilizate. Situaţia se explică prin aceea că o demonstraţie indirectă nu are valoare, din punct de vedere intuiţionist, decît atunci cînd poate fi dublată de una directă. Dar, fiind realmente dublată de una directă (singura certă, care presupune construcţia matematică efectivă), demonstraţia indirectă se dovedeşte *inutilă*, ca şi falsităţile matematice pe care le presupune. Însă, odată cu excluderea demonstraţiilor indirecte sînt excluse din matematica intuiţionistă şi constantele şi variabilele *false* sau *presupus false*, care desemnează falsităţi matematice şi care apar, de regulă, în matematica clasică.

Paralelismul matematico-lingvistic, conform primelor teze intuiţioniste plus teza (VI), poate fi redat deci prin trei trepte: (a) treapta adevărurilor matematice (construcţii matematice efective, independente de limbaj); (b) treapta constantelor intuiţioniste individuale sau propoziţionale (implicite sau explicite), care exprimă toate adevăruri matematice şi (c) treapta variabilelor intuiţioniste individuale sau propoziţionale, care generalizează constante intuiţioniste. Sensul trecerii este (a) $\twoheadrightarrow$ (b) $\twoheadrightarrow$ (c).

Conform schemei (a) $\twoheadrightarrow$ (b) $\twoheadrightarrow$ (c), discuţiile referitoare la valorile de adevăr utilizabile în logica intuiţionistă îşi găsesc o rezolvare *ad oculos*. În acest cadru, nu numai presupoziţiile lui Gonseth, Barzin şi Errera, care încercau introducerea unei valori terţe, se dovedesc lipsite de temei, dar şi cele ale lui Glivenko, care operează cu adevărul şi falsul fără nici o restricţie.

Mult mai apropiată de restricțiile pe care le implică schema (a) ⇝ (b) ⇝ (c) este concepția matematicianului român Octav Onicescu. El consideră, într-o manieră apropiată de cea intuiționistă, că obiectele matematice sînt rezultatul unei „experiențe mentale," [59] sînt „abstracții de ordinul doi" [60]. O teorie științifică în genere, și în special una matematică este un sistem complex alcătuit din raționamente care poartă asupra unor astfel de obiecte. Problema obținerii lor nu ține de cadrul teoriei științifice. Aceasta conține numai ansamblul propozițiilor *adevărate* care pot fi obținute pe baza regulilor de raționare. Ceea ce, consideră Onicescu, „ne obligă să limităm cîmpul acestei logici la o singură valoare, aceea a adevărului" [61].

Concepția lui Onicescu se deosebește însă de cea intuiționistă prin aceea că presupune adevărul în contextul expresiilor lingvistice. Ea apare drept un revers clasic al schemei (a) ⇝ (b) ⇝ (c) în care (a) își menține o oarecare semnificație ontologică, deși Onicescu nu identifică obiectele matematice cu cele concrete, iar(b) realizează adevărul prin confruntare cu (a).

Dar schema (a) ⇝ (b) ⇝ (c), pe care o putem numi *calea directă de realizare a paralelismului matematico-lingvistic*, determină apariția unor expresii, mai mult sau mai puțin complexe, care nu mai corespund întru totul adevărurilor matematice.

c) *Asertarea și atestarea constantelor propoziționale*

Urmînd calea (a) ⇝ (b) ⇝ (c), se constată că pot fi gîndite nu numai operații matematice exprimabile prin α, β, γ, . . ., ci și anumite operații, de alt tip, care poartă *asupra* operațiilor exprimabile prin α, β, γ, . . . Se constată, de exemplu, că efectuînd construcția intuitivă exprimată prin „1 + 2" (α) este efectuată în același timp și construcția intuitivă „2 + 1" (β). Matematic apare aici relația de egalitate (=), iar operația intuitivă este exprimată prin „$1 + 2 = 2 + 1$". Introducînd semnul „=" și între α și β obținem „$\alpha = \beta$". Diferența dintre „$1 + 2 = 2 + 1$" și „$\alpha = \beta$" este numai de notație, căci $\alpha =_{Df} 1 + 2$ și $\beta =_{Df} 2 + 1$. Exprimînd în cuvinte procesul prin

[59] O. Onicescu, *Principes de logique et de philosophie mathématique*, Buc., 1971, p. 10.
[60] *Ibidem*, p. 11.
[61] *Ibidem*, p. 7.

care a fost obținut „$\alpha = \beta$", ajungem însă la următoarea formulare: „*Dacă* $\alpha =_{Df} 1 + 2$ *și* $\beta =_{Df} 2 + 1$, *atunci* $\alpha = \beta$", în care apar cuvintele „dacă... atunci" și cuvîntul „și". Aceste cuvinte exprimă altceva decît operațiile pur aritmetice, care au loc *numai* între entități exprimabile prin cifre.

Din punctul de vedere al lui Brouwer, este evident că aici ne găsim *în al treilea* stadiu al dezvoltării matematicii. Într-adevăr, aici *limbajul matematic a devenit obiect de studiu*, mai precis relațiile dintre expresiile lingvistice de treapta a doua. Aceste relații numite *operații logice* pot fi simbolizate. Atunci din

(1) „*Dacă* $\alpha =_{Df} 1 + 2$ și $\beta =_{Df} 2 + 1$, *atunci* $\alpha = \beta$"

se obține

(2) $$((\alpha =_{Df} 1 + 2) \wedge (\beta =_{Df} 2 + 1)) \supset (\alpha = \beta).$$

Generalizînd expresia (2), respectiv introducînd variabile în locul expresiilor constante care apar în parantezele din (2), obținem

(3) $$(a \wedge b) \supset c$$

Între (2) și (3) este însă o mare diferență. Expresia (2) reprezintă relații între expresii lingvistice *determinate*, adică între expresii care alcătuiesc „paralelismul matematico-lingvistic" (lui $1 + 2$ îi corespunde α, lui $2 + 1$ îi corespunde β). Variabilelor a, b și c din (3) le corespunde însă *orice* expresie constantă. În această situație, din (3) se poate obține, de exemplu, expresia

(4) $$((\alpha =_{Df} 1 + 2) \wedge (\beta =_{Df} 1 + 3)) \supset (\alpha = \beta).$$

Expresia (4) nu mai poate fi însă obținută prin exprimarea unei operații matematice intuitive, respectiv pe cale directă, căci în acest caz s-ar obține expresia

(5) $$((\alpha =_{Df} 1 + 2) \wedge (\beta =_{Df} 1 + 3)) \supset (\alpha \neq \beta).$$

Obținerea operațiilor de tip (3) este perfect legitimă, deoarece se face pe cale directă, dar, odată obținute, interpretarea lor implică însă și legitimitatea unei căi inverse (c) $\twoheadrightarrow$ (b) $\twoheadrightarrow$ (a).

Expresiile de tip (c), interpretabile pe cale inversă, pot fi mai mult sau mai puţin complexe. Cazul cel mai simplu este acela al simplei variabile propoziţionale. Variabila individuală nu duce la dificultăţi, deoarece paralelismul matematico-lingvistic este, în cazul ei, biunivoc prin definiţie. O variabilă individuală a_i se obţine prin generalizarea unui domeniu de constante individuale α_i, β_i, $\gamma_i, \ldots$ şi poate fi înlocuită numai cu astfel de constante. Deşi situaţia ar trebui să fie aceeaşi şi pentru variabila propoziţională, căci şi aceasta se obţine prin generalizarea constantelor propoziţionale, care pe cale directă exprimă adevăruri matematice şi numai adevăruri matematice, pe cale inversă nu se mai poate respecta corespondenţa, deoarece domeniul constantelor propoziţionale nu poate fi redus la constantele propoziţionale obţinute deja şi nici dezvoltat pe baza unor metode speciale, ca în cazul constantelor individuale. Fiind vorba de exemplu de o succesiune oarecare care înaintează liber a_i, b_i, $c_i, \ldots$, de un mediu al devenirii libere, deci un caz limită de construcţie a unei succesiuni numerice, putem înlocui succesiv variabilele individuale a_i, b_i, $c_i, \ldots$ prin alegeri mai mult sau mai puţin libere de entităţi matematice. Să zicem că pentru a_i libertatea de alegere este restrînsă la numere pare între 1 şi 10, pentru b_i la numere pare între 10 şi 20, iar pentru c_i la numere impare între 1 şi 10. Este evident că, în acest caz, există, chiar fără a continua alegerile succesive, multe variante care pot satisface succesiunea de variabile a_i, b_i, c_i. *Oricare* ar fi această variantă, obţinută prin alegeri libere, ea va constitui o succesiune *autentică*.

Această metodă nu poate fi aplicată în cazul variabilelor propoziţionale. Să zicem că este vorba de variabila a, care poate fi înlocuită restrictiv cu adunări de numere întregi diferite între 1 şi 10. În cazul acesta, chiar atît de limitat, constantele propoziţionale obţinute, care prin restricţie vor avea structura $\alpha_i + \beta_i = \gamma_i$, în care α_i, β_i, γ_i sînt numere întregi diferite, vor alcătui o succesiune de expresii dintre care numai o mică parte va corespunde unor operaţii matematice efective. Situaţia este cu atît mai evidentă în cadrul expresiilor complexe.

Aceasta înseamnă că admiterea schemei inverse, respectiv (c) $\ggg\!\longrightarrow$ (b) $\ggg\!\longrightarrow$ (a) pune într-o altă lumină discuţiile referitoare la valorile de adevăr utilizabile în logica intuiţionistă.

Pentru moment interesează însă constantele propoziţionale obţinute pe cale directă şi cele obţinute pe cale inversă, cărora *le corespund* adevăruri matematice. Deoarece primele nu au fost numite

adevărate, nici ultimele nu pot fi astfel calificate. Primele exprimă *direct* adevăruri matematice, ultimele se dovedesc prin verificare, deci *invers*, că exprimă adevăruri matematice. Este evident că *aceeași* constantă propozițională, corespunzătoare unui adevăr matematic, poate fi obținută pe ambele căi și că nu există constantă propozițională de acest tip care să nu poată fi obținută pe ambele căi. Ceea ce diferă este doar *modalitatea* obținerii. Or, această modalitate ține totuși de scheme *diferite* care determină la rîndul lor orientări diferite în logica intuiționistă. Din această cauză, cele două modalități trebuie distinse cu precizie.

O constantă propozițională obținută pe cale directă *asertează* un adevăr matematic, îl afirmă, îl *comunică*, îl *exprimă*. Constantele propoziționale obținute pe cale inversă sînt *atestate*, sînt *confirmate* drept expresii corespunzătoare unor adevăruri matematice sau altfel spus *se dovedesc corespunzătoare acestora numai prin verificare*. Constantele propoziționale obținute pe cale directă vor fi numite *expresii asertate* sau *aserțiuni*, cele obținute pe cale inversă *expresii atestate*.

Din moment ce aserțiunile și expresiile atestate coincid, este evident că admiterea lor, din punct de vedere intuiționist, este lafel de îndreptățită, în ciuda faptului că au fost obținute pe căi diferite. Expresiile atestate, ca și aserțiunile, corespund adevărurilor matematice și numai acestora, respectă deci condiția paralelismului matematico-lingvistic. În plus, fiind expresii care corespund adevărurilor matematice și numai acestora, ele nu permit apariția nici unui raționament în care să fie utilizate expresii ale falsității sau principii ca *tertium non datur* etc. Deci corespund și restricțiilor impuse de teza (VI).

Problema raportului dintre asertarea și atestarea constantelor propoziționale a fost dezbătută pe larg în cadrul discuțiilor referitoare la aspectele comprehensive ale logicii intuiționiste. Ce-i drept, planurile au fost adesea confundate, dar a fost remarcat de la început faptul că, din punct de vedere intuiționist, o constantă propozițională nu poate să apară pur și simplu, ca un enunț oarecare. Ea necesită sau o *afirmare* sau o *confirmare*.

P. Lévy, urmîndu-i pe Barzin și Errera [62] precizează pentru prima dată faptul că trebuie să nu se confunde „simpla enunțare a unei expresii cu afirmarea ei brouweriană” [63]. Pentru a marca dis-

[62] *Cf*, M. Barzin & A. Errera, *Sur la logique de M. Brouwer*, p. 56.
[63] P. Lévy, *Logique clasique, logique brouwerienne et logique mixte*, p. 256 și p. 266.

tincţia, el introduce semnul „+" în faţa expresiilor atestate, pe care le numeşte „adevărate-Br" sau „demonstrabile"[64]. Astfel: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, sînt simple expresii, iar $+\alpha, +\beta, +\gamma, \ldots$ sînt expresii atestate. Terminologia utilizată de Lévy ar putea sugera şi faptul că expresiile în discuţie ar fi aserţiuni. Însuşi termenul de „afirmare" sugerează aşa ceva. În realitate, pe Lévy nu-l interesează obţinerea constantelor pe calea directă, ci confirmarea lor prin demonstraţie. Distincţia vizează deci numai deosebirea constantei propoziţionale în accepţie intuiţionistă de simplul enunţ din logica obişnuită.

Heyting preia distincţia semnalată de Lévy. El menţionează că o expresie oarecare α „exprimă o problemă" [65]. În logica obişnuită atestarea lui α presupune confruntarea cu o „natură transcendentă", ceea ce nu poate să admită un intuiţionist. Atestarea intuiţionistă, afirmarea brouweriană, cum zice Heyting, înseamnă *demonstrarea* expresiei α, mai precis „demonstrarea prin construcţie"[66]. Este evident că Heyting vorbeşte în alţi termeni despre procesul atestării. Şi el face distincţia între simpla expresie α şi expresia atestată pe care o notează $\vdash \alpha$, dar el nu insistă numai pe această distincţie, care marchează specificul constantei propoziţionale intuiţioniste faţă de constanta din logica obişnuită, ci şi pe modalitatea pur intuiţionistă a atestării prin construcţie *intuitivă*, deci prin construcţia adevărului matematic, nu printr-o simplă demonstraţie, cum ar fi de exemplu una indirectă, bazată pe *tertium non datur*. Heyting nu vorbeşte explicit despre aserţiune şi nu introduce deci nici un semn special diferit de cel al atestării.

Distincţia este reluată de P. Destouches-Février [67] care separă expresiile simple (construcţii care urmează să fie realizate) de „construcţiile realizate sau reuşite". Pentru ultimele introduce semnul „$\propto$". Aici însă distincţia apare, deşi nu întru totul explicit, între o expresie simplă, care urmează să fie *atestată* şi o expresie *asertată*. Distincţia nu este evidentă datorită faptului că Destouches-Février identifică expresiile cu construcţiile. În mod normal nu se poate vorbi despre o „construcţie" neconstruită încă, ci despre o expresie căreia nu-i corespunde încă nici o construcţie.

Notaţia lui Lévy nu poate fi utilizată, căci ar da naştere la confuzii între atestare şi semnul adunării. Cea a lui Heyting este de ase-

[64] *Ibidem*, p. 257.

[65] A. Heyting, *Sur la logique intuitionniste* p. 958, Bulletin de la Classe de Sciences de l'Académie royale de Belgique, 1930.

[66] *Ibidem*, p. 959.

[67] P. Destouches-Février, *Le calcul des constructions*, Comptes rendus des séances de l'Academie des sciences, Paris, 227, 1948, p. 1192.

menea necorespunzătoare, ea fiind utilizată de obicei pentru expresii care conțin variabile, în genere pentru expresii complexe, tautologice. În plus, ea ar sugera și accepția formalistă căci semnul „$\vdash$" se pune de obicei în fața unei expresii care a fost dedusă din axiome, în fața unei teoreme logice care poate să fie lipsită de semnificație matematică. În cazul nostru este vorba însă de expresii alcătuite din constante, care sînt atestate *după* ce au fost deduse, dar *nu deoarece* au fost deduse. Semnul „ R " este incomod și nu marchează deosebirea dintre asertare și atestare. Din aceste motive introducem o notație specială. Semnul „$\llcorner_s$" stă în fața unei expresii asertate, iar semnul „$\llcorner_t$" în fața unei expresii atestate. Ambele semne pot fi puse și în fața unor expresii complexe, cum ar fi (2) sau (5), și în fața unor expresii simple ca α. În cazul în care α prescurtează expresia „$1 + 2 = 3$" care exprimă construcția mentală UNU PLUS DOI ESTE EGAL CU TREI, atunci scriem „$\llcorner_s \alpha$", deci asertăm α. Dacă α prescurtează, să zicem, expresia „$1279 + 320 = 1599$", atunci verificăm operația și dacă ea va corespunde unei construcții aritmetice, o atestăm, respectiv scriem „$\llcorner_t \alpha$".

d) *Negarea constantelor propoziționale*

Mergînd pe cale intuiționistă directă, de la construcția mentală la expresia lingvistică, este evident că se ajunge *numai* la constante asertate. Dacă notăm cu majuscule latine construcțiile mentale, cu majuscule gotice expresiile cifrice și cu litere mici grecești constantele propoziționale, obținem următoarea relație

(6) $$(A) \twoheadrightarrow (\mathfrak{A}) \twoheadrightarrow (\llcorner_s \alpha).$$

Dacă se pornește invers, de la o constantă propozițională oarecare dată sau de la o expresie dată care conține constante propoziționale la expresia cifrică și la construcția mentală, apar însă *două* situații: *una* în care se ajunge la o construcție mentală, ceea ce implică atestarea constantei propoziționale și *alta* în care nu se ajunge la o construcție mentală. Prima situație poate fi redată prin formula

(7) $$[(\alpha) \twoheadrightarrow (\mathfrak{A}) \twoheadrightarrow (A)] \twoheadrightarrow (\llcorner_t \alpha).$$

Situația a doua presupune la rîndul ei *două cazuri*: unul în care poate fi realizată o construcție mentală corespunzătoare *unei alte* expresii constante care o *contrazice* pe cea în discuție — în acest caz expresia constantă în discuție *este negată* și altul în care nu poate fi realizată nici o construcție mentală corespunzătoare unei alte expresii constante care să o contrazică pe cea în discuție — în acest caz expresia este nedecidabilă *vi materiae*.

Primul caz poate fi redat astfel:

$$(8)\qquad \begin{array}{ccccccc} (\alpha) & \twoheadrightarrow & (\mathfrak{A}) & \twoheadrightarrow & (-) & & (\neg\,\alpha) \\ & & & & \downarrow & & \uparrow\downarrow \\ & & & & (B) & \twoheadrightarrow\ (\mathfrak{B})\ \twoheadrightarrow & (\llcorner_{s}\,\beta) \end{array}$$

Semnul „$\neg$" reprezintă negația intuiționistă, iar cele două săgeți contrare reprezintă contradicția.

Al doilea caz poate fi redat astfel:

$$(9)\qquad [(\alpha) \twoheadrightarrow (\mathfrak{A}) \twoheadrightarrow (-)] \twoheadrightarrow (\alpha^{0})$$

(α^0) exprimă faptul că lui (α) care prescurtează expresia $(\mathfrak{U})$ nu-i corespunde nici o construcție (A) ca în cazul (7) și nici o construcție (B) a cărei expresie prescurtată (β) să contrazică (α) ca în cazul (8).

Trebuie remarcat, în primul rînd, faptul că formulele (6) — (9) *nu presupun nici o referință la valorile de adevăr*. Aceasta înseamnă că nici negația constantelor propoziționale, în acest context, nu are legătură cu valorile de adevăr. Mai trebuie remarcat, pe baza distincțiilor anterioare, faptul că expresia constantă negată $(\neg\,\alpha)$ se obține prin intermediul unei aserțiuni $(\llcorner_{s}\beta)$ care o contrazice; expresia negată nu poate fi obținută prin atestare. Acesta este un lucru esențial, asupra căruia se va reveni. De remarcat, pentru moment, este faptul că, neputînd fi atestată, constantei propoziționale negate *nu-i corespunde nici un adevăr matematic*. Acesta este însă numai punctul de vedere al lui Brouwer. El numește negația de acest tip *absurditate*, iar metoda prin care este obținută, respectiv formula (8), *reducere la absurditate*. Reducerea la absurditate nu trebuie confundată cu demonstrația indirectă sau demonstrația prin absurd. În demonstrația prin absurd se pleacă de la o alternativă de tipul $(\alpha \vee \sim\alpha)$ și prin $(\sim\sim\alpha)$ se demonstrează (α). În reducerea la absurditate, care poate fi numită, pentru a evita confuziile, *reducere la negație*, se pornește de la o expresie (α) și printr-o *altă* expresie (β) care este

asertată ($\llcorner_s$ β) şi care o contrazice pe (α) se ajunge la negarea lui α, respectiv la (¬ α). Demonstrația prin absurd se bazează pe *tertium non datur*, pe cînd reducerea la negație pe *legea contradicției.*

Demonstrația prin absurd presupune *o singură expresie* şi anume α şi se bazează pe un *joc valoric* : α şi ∼ α înseamnă α adevărat şi α fals. Reducerea la negație presupune *două expresii diferite* α şi β dintre care una, respectiv β, este asertată ($\llcorner_s$ β), iar cealaltă, respectiv α, este negată (¬ α) în conformitate cu legea contradicției. Legea contradicției presupune *două expresii contradictorii.* Cea mai elementară cerință a contradicției este ca *cele două expresii să fie diferite.* Acest lucru este ignorat în logica matematică. Legea contradicției este redată simbolic prin ∼ (α & ∼ α) ceea ce înseamnă că nu se poate ca *una şi aceeaşi expresie* să fie în acelaşi timp adevărată şi falsă.

Cele de mai sus pot fi ilustrate cu exemple. Dacă α prescurtează „1 + 2 = 4'', atunci lui „1 + 2 = 4'' nu-i corespunde nici o construcţie mentală, deci α nu poate fi atestat, în schimb poate fi construit UNU PLUS DOI ESTE EGAL CU TREI, care este exprimat sau asertat prin „1 + 2 = 3'' şi prescurtat prin $\llcorner_s$ β. Este evident că „1 + 2 = 4'' *este diferit* de „1 + 2 = 3'' şi în acelaşi timp *se contrazic*, se exclud reciproc, ceea ce înseamnă că fiind admis (asertat) unul, trebuie respins (negat) celălalt. Însă β a fost asertat ($\llcorner_s$ β) deci α este negat (¬ α). Ar fi incorect ca „1 + 2 = 4'' să fie prescurtat cu α, iar „1 + 2 = 3'' tot cu α, indiferent care dintre ele ar fi adevărat sau fals în sens obişnuit.

Acelaşi lucru se petrece şi în cazul expresiilor constante complexe. Dacă notăm cu „*A*'' expresia constantă complexă

(4) $$((\alpha =_{Df} 1 + 2) \wedge (\beta =_{Df} 1 + 3)) \supset (\alpha = \beta)$$

şi cu „*B*'' expresia constantă complexă

(5) $$((\alpha =_{Df} 1 + 2) \wedge (\beta =_{Df} 1 + 3)) \supset (\alpha \neq \beta)$$

care exprimă o construcție matematică intuitivă, atunci asertăm *B*, respectiv ($\llcorner_s$ *B*) şi negăm *A*, respectiv (¬ *A*).

Heyting nu subscrie acestui punct de vedere şi încearcă să justifice negația cu ajutorul aşa-numitelor *construcţii ipotetice.* Schema după care lucrează el este următoarea :

(8′) $$[(\alpha) \twoheadrightarrow (\mathfrak{A}) \twoheadrightarrow (\emptyset)] \twoheadrightarrow (\neg\, \alpha).$$

Schema (8′) arată faptul că negația lui α a fost obținută prin aceea că expresiei 𝔄, pe care o prescurtează α, îi corespunde o construcție

ipotetică contradictorie (Ø). Se observă imediat că Heyting lucrează cu o singură expresie, respectiv α. El aplică aici principiul contradicției din logica matematică și este nevoit adesea să folosească termenii de „adevărat" și „fals".

Exemplul lui Heyting este simplu: α prescurtează aici pe „$2 + 2 = 5$". El consideră că expresiei „$2 + 2 = 5$" i-ar corespunde o construcție matematică în care nu se poate stabili o corespondență biunivocă între elementele lui „$2 + 2$" și elementele lui „5". Deoarece nu se poate stabili corespondența, se neagă α. Este evident că imposibilitatea de a stabili o corespondență presupune implicit imposibilitatea oricărei construcții *reale*. Ceea ce rămîne este „construcția ipotetică" sau „intenția unei construcții".

Heyting însuși se referă și la soluția lui Brouwer [68], care îi opune lui „$2 + 2 = 5$" pe „$2 + 2 = 4$", ceea ce exprimă într-adevăr *o construcție matematică reală*, a cărei expresie prescurtată contrazice, fără utilizarea valorilor de adevăr, expresia inițială.

Problema construcțiilor ipotetice este desigur discutabilă. În acest context, ea reprezintă o încercare de a simplifica teoria brouweriană a negației, fără a încălca principiile constructivismului. Negația, ca orice expresie, are nevoie, din punct de vedere intuiționist, de ceea ce van Dantzig numește „dovadă prin facere". Dar, în acest sens, numai soluția lui Brouwer este autentică, deoarece presupune o construcție efectivă, o „facere" propriu-zisă.

Cu toate acestea, concepția lui Brouwer a fost abandonată în favoarea concepției lui Heyting, aceasta din urmă fiind la rîndul ei simplificată. Dealtfel, Heyting însuși prezintă adesea negația în mod simplificat, adică fără să mai facă apel la construcțiile ipotetice. El utilizează formulări ca: „negația lui α înseamnă «α implică contradicție»" [69] sau „presupunînd că ar fi dată soluția lui α, se obține o contradicție" [70] sau „O propoziție este falsă dacă duce la o contradicție: mai explicit, afirmăm negația unei propoziții α dacă am derivat o contradicție din presupunerea că α a fost demonstrată. Derivarea contradicției este o construcție matematică... putem nega α numai după ce am demonstrat că α este contradictorie" [71]. Se observă aici

[68] *Cf.* A. Heyting, *Remarque sur le constructivisme*, Logique et analyse, 3, 1960, p. 179.

[69] A. Heyting, *Sur la logique intuitionniste*, p. 959.

[70] A. Heyting, *Les fondements des mathématiques*, p. 17.

[71] A. Heyting, *Intuitionism in matematics*, in „Philosophy in the Mid-Century", Firenze, 1958, p. 108.

faptul că Heyting identifică „falsul cu negația", deși negația intuiționistă nu presupune valori de adevăr. În plus „derivarea contradicției este considerată o construcție" și se consideră că „α este contradictorie", adică se contrazice pe sine. Această concepție a fost preluată de către formaliștii neointuiționiști ca Lorenzen, Kleene, Troelstra ș.a. Negația s-a transformat în formula :

(10) $$\neg \alpha =_{Df} \alpha \to \curlywedge$$

în care $\curlywedge$ înseamnă falsul sau contradicția.

Ambele accepții ale negației sînt însă diferite de accepția obișnuită. Ele se deosebesc în primul rînd (accepția brouweriană) prin dispensarea de valorile adevăr și fals, iar în al doilea rînd (Heyting), prin identificarea negației cu falsul.

Identificarea negației cu falsul, poate să aibă drept consecință excluderea negației din logica intuiționistă. Ea este analogă excluderii falsului (à la Onicescu). Această poziție a fost susținută în mod consecvent și teoretizată de către matematicianul și filozoful olandez G.F.C. Griss.

Trebuie accentuat asupra faptului că independent de identificarea negației cu falsul poziția intuiționistă nu presupune, pînă în acest moment, necesitatea excluderii negației. Aceasta cu condiția admiterii *ambelor* căi (directă și inversă) de realizare a paralelismului matematico-lingvistic. Necesitatea schemei inverse a apărut drept o consecință firească a primei scheme . Într-adevăr, cu ajutorul primei scheme se ajunge de la entitățile matematice la constante propoziționale și apoi la variabile. Acestea, odată obținute, presupun implicit posibilitatea înlocuirii lor cu constante propoziționale și deci necesitatea unei căi inverse pe care să se poată ajunge la entitățile matematice. Iar pe cale inversă negația poate fi justificată à la Brouwer — fără identificarea ei cu falsul.

Cu toate acestea, deși ideea inițială a fost a lui Griss, iar acesta pornea de la identificarea negației cu falsul, au existat și alte puncte de vedere, în virtutea cărora negația trebuie exclusă, independent de identificarea ei cu falsul. De data aceasta condiția este *restrîngerea* paralelismului matematico-lingvistic la calea directă. Este vorba de așa-numita „poziție strict constructivă", susținută de P. Destouches-Février [72]. Excluderea schemei inverse implică într-adevăr și exclu-

[72] P. Destouches-Février, *Le calcul des constructions*, Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, Paris, 227, 1948, p. 1193.

derea negației, căci pe cale directă nu pot fi obținute decît aserțiuni (*id est* constante propoziționale asertate). Dar restricția este prea tare, deoarece renunțarea la calea inversă înseamnă implicit și *excluderea atestării*, respectiv a constantelor propoziționale, care, deși *nu au fost* obținute pe cale directă, *pot fi* obținute și pe cale directă. Altfel spus, înseamnă renunțarea la obținerea *prealabilă* a expresiilor și la verificarea lor *ulterioară*. Pentru a compensa acest neajuns, P. Destouches-Février consideră că este posibilă și elaborarea unei alte logici, tot în sens constructiv, dar *nu strict*. În această logică negația ar putea fi introdusă à la Heyting, prin Ø, presupunîndu-se că Ø sau contradicția „ar necesita și ea o construcție". Dar nici în această situație nu s-ar obține decît o „logică pozitivă", deoarece Ø trebuie definită pozitiv [73]. Într-adevăr, admițînd că și contradicția ar fi o construcție, definiția $Ø =_{Df} (1 = 2)$ ar fi și ea pozitivă. Este demn de remarcat faptul că P. Destouches-Février, care, alături de „logica construcțiilor" = a aserțiunilor, deci fără negație și alături de logica pozitivă, a problemelor care urmează să fie rezolvate, menționează și o „logică a propozițiilor", nu face nici un apel la valori de adevăr, nici măcar în legătură cu problemele controversate ale negației [74].

Griss dimpotrivă pornește de la teza că „În matematică nu se poate vorbi de supoziții false" [75]. Acestea ar putea să apară, într-adevăr, dar nu în *matematică*, repectiv în matematica înțeleasă drept *știință teoretică*. „A pune problema și a căuta soluții sînt activități prematematice" [76]. Numai la acest nivel pot fi puse probleme false, respectiv pot fi enunțate constante propoziționale cărora să nu le corespundă nici o construcție matematică. Griss nu este însă un adversar al căii inverse de obținere a paralelismului matematico-lingvistic. Aceasta tocmai datorită faptului că el identifică negația cu falsul, adică are un criteriu pe baza căruia poate să *selecteze* constantele propoziționale obținute pe cale inversă. Acest criteriu îl constituie *raționamentele speciale ale matematicii intuiționiste*, respectiv conformitatea cu teza (VI). Pe baza acestor raționamente, în care nu se operează cu *tertium non datur* și nici cu *negatio duplex*,

[73] P. Destouches-Février, *Logique de l'intuitionnisme sans négation et logique de l'intuitionnisme positiv*, Comptes rendus..., Paris, 226, 1948, p. 39.

[74] P. Destouches-Février, *Sur l'intuitionnisme et la conception strictement constructive*, Indagationes mathematicae, XIII, 1951, p. 80.

[75] G. F. C. Griss, *Mathématique, mystique et philosophie*, în „Mélanges philosophiques", Amsterdam, 1948, p. 162.

[76] G. F. C. Griss, *Logique des mathématiques intuitionistes sans négation*, Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sc., Paris, 227, 1948, p. 946.

pot fi obținute constante propoziționale sau combinații ale acestora, care în mod evident nu sînt aserțiuni; ele pot fi oricînd atestate, dar niciodată negate. Numai în cazul în care ar fi utilizate *altfel* de raționamente decît cele permise în matematica intuiționistă, s-ar putea ajunge la enunțuri care ar trebui negate. „Negația trebuie suprimată din aceleași motive din care este suprimat terțul exclus”[77].

Pentru a-și susține punctul de vedere, Griss întreprinde o critică serioasă a concepției lui Heyting. El consideră, spre deosebire de P. Destouches-Février, că introducerea negației prin Ø nu este *deloc* constructivă, nici măcar în sensul nestrict al lui Heyting însuși. Griss nu ia însă în considerație poziția lui Brouwer în problema negației, care este totuși constructivă. El constată însă că în lucrările lui Brouwer, atît în cele pur matematice cît și în cele teoretice, nu este utilizată negație. În cele pur matematice ea nu poate să apară datorită restricțiilor prevăzute în teza (VI), iar în cele teoretice nu joacă nici un rol, căci intuiția matematică este un act pozitiv, de construcție efectivă a entităților matematice[78].

Există prin urmare două poziții intuiționiste în interpretarea constantelor propoziționale negate. Una în care negația este admisibilă, cu cele două variante (a lui Brouwer și a lui Heyting) și alta în care negația este respinsă, cu cele două variante amintite mai sus.

Din punct de vedere al paralelismului matematico-lingvistic, cea mai îndreptățită pare ultima poziție. Într-adevăr, fie că negația este identificată cu contradicția, fie că este identificată cu falsul, ei nu îi corespunde nimic în matematica intuiționistă, și prin urmare nu trebuie să apară nici în limbajul matematicii intuiționiste. Cu toate acestea, specificul negației intuiționiste, faptul că, în varianta lui Brouwer, nu-i corespund construcții matematice efective, ci construcții care o contrazic, iar în varianta lui Heyting doar construcții ipotetice de contradicții matematice, face ca admiterea constantelor propoziționale negate să nu încalce paralelismul matematico-lingvistic. Încălcarea ar apare doar în cazul cînd ar exista constante propoziționale cărora nu le-ar corespunde construcții matematice efective și nici construcții care să le contrazică (în varianta lui Brouwer) sau le-ar corespunde construcții efective false (în varianta lui Heyting).

[77] G. F. C. Griss, *La mathematique intuitioniste sans negation,* Nieuw Archief voor Wiskunde, III, 1955, p. 136.

[78] *Ibidem*, p. 135.

Odată admis acest lucru rămîne deschisă problema *obținerii* constantelor propoziționale care urmează a fi negate. Pe cale directă, adică pornind de la construcții matematice efective, nu pot fi obținute (Février), iar acest lucru este perfect corespunzător primelor teze intuiționiste, şi nici prin intermediul raționamentelor admisibile, în conformitate cu teza (VI) — poziția lui Griss.

Un argument convingător, care poate să justifice obținerea, dar *neintenționată*, a constantelor propoziționale care trebuie negate îşi găseşte fundamentul în teza intuiționistă (III). Într-adevăr, obiectul logicii matematice fiind limbajul matematic, iar acesta fiind un mijloc, mai mult sau mai puțin exact, de exprimare a construcțiilor matematice, *și* în logica matematicii intuiționiste este posibilă apariția erorilor. Brouwerian vorbind, apariția unor constante propoziționale care prescurtează expresii cifrice greşite. Acestea se pot obține chiar pe cale directă, pornind de la construcții matematice ireproşabile. Fie, de exemplu, construcția intuitivă A, aceasta este exprimată cifric prin $\mathfrak{B}$, iar $\mathfrak{B}$ este prescurtat prin constanta individuală β. În mod normal β este asertat, respectiv $\llcorner_s \beta$. Dar oare putem fi siguri că $\mathfrak{B}$ exprimă exact construcția A? După Brouwer acest lucru este posibil numai în cazuri simple. În cazuri complicate *este necesară verificarea* lui β. Or, deşi β a fost obținut pornindu-se de la A, se poate dovedi că lui A îi corespunde de fapt $\mathfrak{A}$ prescurtat prin α, respectiv $\llcorner_s \alpha$, care îl contrazice pe β, de unde apare necesitatea negării lui, respectiv $\neg \beta$.

Dar expresiile negate pot fi obținute, tot în conformitate cu teza (III), şi pe altă cale, respectiv prin intermediul raționamentelor. Căci acestea, deşi sînt reduse la cele universal valabile, purtînd asupra limbajului matematic şi nu asupra construcțiilor matematice efective, pot duce la rezultate eronate. Brouwer insistă asupra acestui lucru. El consideră că nu există adevăruri înainte de a fi experimentate, indiferent de modalitatea logică prin care au fost obținute, respectiv prin respectarea riguroasă a raționamentelor [79]. Dacă, pornind de la constantele atestate $\llcorner_t \alpha$, $\llcorner_t \beta$ şi $\llcorner_t \gamma$ se obține pe cale logică, prin raționamente intuiționiste, constanta propozițională δ, ea nu poate fi atestată în mod automat. Atestarea presupune verificarea ei. Dar în cadrul verificării se poate constata că lui δ îi corespunde o construcție matematică E, exprimată prin $\mathfrak{E}$ şi prescurtată prin $\llcorner_t \varepsilon$ care îl contrazice pe δ, de unde se obține $\neg \delta$.

[79] L. E. J. Brouwer, *Consciousness, philosophy and mathematics*, Proc. Xth intern. Congress of Philosophy, Amsterdam, 1948, p. 1243

Obținerea constantelor propoziționale care urmează a fi negate poate fi justificată deci pe baza tezei (III). În acest context, se poate reproșa lui Février și Griss că *nu admit posibilitatea* erorii, în primul caz, la exprimarea directă a construcțiilor matematice, în al doilea caz, la aplicarea raționamentelor asupra limbajului matematic. Dar reproșul nu este absolut. Ca și în cazul menționat, al excluderii falsului (la Onicescu), prin matematica intuiționistă poate fi înțeleasă teoria realizată și verificată a matematicii intuiționiste. În acest caz, negația pare într-adevăr inutilă. Nu trebuie uitat însă că, pentru Brouwer, matematica intuiționistă nu este o teorie, ci o *activitate*.

e) *Constante propoziționale nedecidabile*

Calea intuiționistă indirectă de obținere a paralelismului matematico-lingvistic presupune și discutarea așa-numitelor constante propoziționale *nedecidabile*, care apar în forma generalizată.

(9) $$[(\alpha) \ggg\!\!\longrightarrow (\mathfrak{A}) \ggg\!\!\longrightarrow (-)] \ggg\!\!\longrightarrow (\alpha^0).$$

Este vorba de acele constante propoziționale, cărora, din punctul de vedere al lui Brouwer, nu le corespunde nici o construcție matematică efectivă, ca în cazul constantelor atestate, și nici o construcție matematică efectivă a cărei expresie lingvistică, să zicem β, să contrazică constanta propozițională în discuție, ceea ce ar determina negarea ei. Mai simplu, o constantă propozițională α este α^0, dacă pentru α nu se poate demonstra nici $\llcorner_\iota \alpha$ nici $\urcorner \alpha$.

În accepția lui Heyting, este vorba de constante propoziționale cărora nu le corespund construcții matematice efective, respectiv nu se dovedesc adevărate, dar nu le corespund nici construcții ipotetice contradictorii, deci nu se dovedesc nici false.

În aceepția obișnuită este vorba de constantele propoziționale care nu sînt nici adevărate nici false și care au dat naștere interpretărilor trivalente ale logicii intuiționiste.

Problema esențială, din punct de vedere al interpretării comprehensive a logicii intuiționiste, poate fi concentrată în întrebarea : în logica matematicii intuiționiste sînt sau nu admisibile constantele propoziționale nedecidabile ?

Este incontestabil faptul că intuiționiștii au fost primii care s-au ocupat în mod special cu depistarea enunțurilor matematice

nedecidabile. Mai mult, ei și-au fundamentat tezele pe existența efectivă a acestora. Dar aceasta nu înseamnă că le-au inclus în matematica intuiționistă.

Constantele nedecidabile, care prescurtează astfel de enunțuri, nu pot fi obținute pe cale directă nici măcar în calitate de erori. Ele nu pot fi obținute nici pornind de la constante atestate, pe baza raționamentelor logice admisibile intuiționistic, căci și în acest caz pot fi obținute doar constante atestate sau negate. Mai mult, obținerea lor întîmplătoare sau postularea lor nu are legătură nici cu matematica intuiționistă și nici cu logica acestei matematici. Astfel de enunțuri își au locul numai într-o logică în care este postulată valabilitatea absolută a legii terțului exclus. Dar, într-un astfel de context ele își pierd caracterul nedecidabil. În contextul unei astfel de logici, constanta α nu devine nedecidabilă, căci este valabilă formula $(\alpha \vee \sim \alpha)$. Deci constanta α, nedecidabilă intuiționistic, poate să apară drept componentă a unei formule valide. Brouwer a insistat adesea asupra faptului că admiterea valabilității legii terțului exclus în matematici coincide cu admiterea tezei că *nu există probleme matematice insolubile* [80], deci nici constante propoziționale nedecidabile.

Pe această bază, Barzin și Errera au susținut că nu este posibilă respingerea legii terțului exclus decît prin admiterea constantelor nedecidabile, iar admiterea constantelor nedecidabile (considerate de valoare terță) nu mai permite respectarea legii noncontradicției. Dar punctul de vedere intuiționist, conform primelor teze, este acela de respingere a constantelor nedecidabile și, în același timp, de respingere a valabilității legii terțului exclus, conform cu teza (VI), dar de menținere a legii noncontradicției.

Necesitatea respingerii constantelor nedecidabile este evidentă în contextul paralelismului matematico-lingvistic, dar necesitățile aceluiași paralelism determină și respingerea valabilității terțului exclus *independent* de existența problemelor matematice insolubile deși inițial Brouwer a *pornit* de la astfel de probleme. Este vorba de cele două căi de obținere a paralelismului matematico-lingvistic. Conform primei căi se pleacă de la construcția efectivă A și se ajunge la $\llcorner_s \alpha$. Această cale *nu poate să ducă la formule de tipul terțului exclus* nici măcar în cazul în care, datorită imperfecțiunii limbajului, se comite o eroare și se ajunge la $\llcorner_s \beta$, care ulterior, prin verificare, devine $\urcorner \beta$, nu se obține o alternativă de tipul terțului exclus, căci

[80] Brouwer, *De onbetrouwbaarheid*,. p. 9.

($\llcorner_s \alpha \vee \neg \beta$) nu este același lucru cu ($\llcorner_s \alpha \vee \neg \alpha$) = expresie imposibil de obținut pe această cale. Obținerea unei constante propoziționale pe calea raționamentelor logice se face *numai pornind de la constante atestate în prealabil* și nu de la constante negate, ceea ce face imposibilă apariția *formulelor disjunctive cu un termen negat.* Obținerea unei constante *oarecare* α este imposibilă în contextul paralelismului matematico-lingvistic. Ceea ce se obține este fie $\llcorner_s \alpha$ fie $\llcorner_t \alpha$ fie $\neg \alpha$. Numai obținerea unui α fără aceste determinații, deci *în afara* paralelismului matematico-lingvistic, ar îndreptăți întrebarea „oare este adevărat α sau $\sim \alpha$? (într-o logică a terțului exclus) sau întrebarea „Este posibil să nu se poată demonstra nici α nici $\sim \alpha$?" (într-o logică trivalentă).

Concluzia firească este că în logica matematicii intuiționiste nu au ce căuta constantele nedecidabile, iar excluderea lor nu înseamnă admiterea valabilității absolute a legii terțului exclus. Acesta este un punct de vedere fundamentat cu strictețe pe tezele intuiționiste.

Cu toate acestea, Heyting înclină să admită constantele nedecidabile, ca pe niște expresii *intermediare* între $\llcorner_t \alpha$ și $\neg \alpha$. „Însă, spune Heyting, nu trebuie să utiăm că α^0 nu poate fi niciodată o expresie definitivă, deoarece există posibilitatea ca $\llcorner_t \alpha$ sau $\neg \alpha$ să poată fi demonstrată cîndva" [81]. Procedeul prin care ajunge Heyting la acest rezultat nu este însă intuiționist. „Fie dată, zice el, o propoziție α..." [82] pentru care se poate demonstra fie $\llcorner_t \alpha$ fie $\neg \alpha$ fie nici una nici alta, deci α^0. Dar „Fie dată..." este o cale neintuiționistă, de postulare a constantelor propoziționale.

Heyting respinge totuși constantele nedecidabile astfel postulate pe motivul că nu ar fi permanente. Există într-adevăr și astfel de situații, dar α^0 nu le vizează numai pe acestea. Și dacă este vorba de o manieră arbitrară de a postula astfel de constante, atunci *fie dată* ipoteza lui Goldbach „Orice număr par poate fi reprezentat prin suma a două numere prime" sau „Între zecimalele lui π există succesiunea 123456789" pentru care este practic imposibil să se demonstreze $\llcorner_t \alpha$ sau $\neg \alpha$. Prin urmare, lipsa de permanență nu este un motiv suficient pentru respingerea constantelor nedecidabile. Motivul pur intuiționistic trebuie să fie conformitatea cu tezele intuiționiste care determină paralelismul matematico-lingvistic.

Se poate conchide că postularea oricărei constante nedecidabile trebuie să implice, în cadrul logicii intuiționiste, *respingerea* ei.

[81] A. Heyting, *Sur la logique intuitionniste*, p. 960.
[82] *Ibidem*, p. 959.

Barzin şi Errera au observat un lucru interesant şi anume faptul că respingerea intuiţionistă a constantelor de tip α^0 este şi ea *un fel de negaţie*. Ei se referă la enunţuri de genul „este fals că principiul terţului exclus este fals" [83], — în loc de „Principiul terţului exclus" poate figura orice constantă nedecidabilă — ; acelaşi lucru se petrece în cazul în care se spune că „principiul terţului exclus nu este adevărat". Enunţurile sînt complementare: „este fals că este fals" nu înseamnă, din punct de vedere intuiţionist, că „este adevărat", iar „nu este adevărat", nu înseamnă „este fals". Despre α^0 nu se poate spune însă nici că „este adevărat" nici că „este fals". Problema care interesează acum este distincţia dintre „nu este adevărat" şi „este fals", în notaţia noastră, dintre α^0 şi $\neg\, \alpha$.

Heyting încearcă, la început, să eludeze problema [84], mai precis, încearcă s-o rezolve utilizînd argumente gnoseologice, ceea ce nu poate să ducă la nici un rezultat pozitiv. „Nu este adevărat", conchide în cele din urmă Heyting, înseamnă „nu a fost demonstrat", iar „este fals" are semnificaţia amintită deja.

Barzin şi Errera nu se mulţumesc cu acest răspuns [85]. Heyting este nevoit să admită *două tipuri de negaţie*, una „tare" şi una „mai slabă" [86]. Ultima, consideră el, nu este aplicabilă în logica formală. Negaţia tare, în accepţia lui Heyting, este negaţia intuiţionistă identifică cu falsul. Ea se citeşte „este fals că..." sau „este imposibil ca...". Negaţia slabă se citeşte „nu este adevărat că...". În propoziţiile matematice [expresii constante] apare numai prima, însă în propoziţiile *despre* matematică nu poate fi evitată a doua [87]. Înlăturînd utilizarea negaţiei slabe din matematică, Heyting se postează pe o poziţie intuiţionistă, dar *indirectă* şi, în acelaşi timp, *arbitrară*.

Poziţia este indirectă, deoarece negaţia slabă este deja o consecinţă a admiterii într-un fel sau altul a constantelor nedecidabile. Ea este arbitrară deoarece presupune o interdicţie lipsită de temei logic. Într-adevăr, pornind pe această cale, o constantă (sau combinaţie de constante) trebuie să fie sau adevărată sau falsă, sau „nici

[83] M. Barzin et A. Errera, *Sur la logique de M. Heyting*, Enseignement mathématique, XXX, 1931, p. 248.

[84] *Cf.* A. Heyting, *A propos d'un article de MM Barzin et Errera*, Enseignement mathématique, XXXI, 1932, p. 122.

[85] M. Barzin et A. Errera, *Note sur la logique de M. Heyting*, Enseignement mathématique, XXXI, 1932, p. 123.

[86] A. Heyting, *Discution sur la logique intuitionniste*, Enseignement mathématique, XXXI, 1932, p. 272.

[87] A. Heyting, *Intuitionism in matematics*, p. 108—109.

adevărată nici falsă". Dar, în acest sens ar trebui să li se dea dreptate lui Barzin şi Errera, căci de ce să fie admise constantele negate, false în cel mai tare sens al cuvîntului, şi să fie respinse cele care nu sînt adevărate dar nici false?

Temeiul respingerii acestora rezidă numai în respectarea consecventă a tezelor intuiţioniste.



Trecerea în revistă a tipurilor de constante propoziţionale, care apar în contextul logicii intuiţioniste, pune în evidenţă faptul că interpretarea valorică a logicii intuiţioniste nu este o problemă simplă. Există cîteva variante şi toate se dovedesc îndreptăţite, deşi nu în aceeaşi măsură.

În conformitate cu tezele intuiţioniste, cea mai potrivită se dovedeşte varianta lui Brouwer, după care adevărul nu apare decît pe treapta matematicii pure. Acest lucru nu poate fi admis însă decît în matematica intuiţionistă. Limbajul matematic nu face decît să exprime acest adevăr. Limbajul în sine nu este adevărat sau fals. Din această cauză, nici constantele propoziţionale nu sînt adevărate sau false, iar negaţia unei constante propoziţionale nu are nici o legătură cu valorile de adevăr. Imposibilitatea obţinerii constantelor nedecidabile şi inutilitatea lor nu mai permite nici o discuţie în legătură cu o eventuală interpretare polivalentă a logicii intuiţioniste.

Transpunerea adevărului de la nivelul matematicii pure la acela al limbajului matematic, admiterea în exclusivitate a căii directe de obţinere a paralelismului matematico-lingvistic înconsiderarea matematicii drept o teorie elaborată deja, permit lui Onicescu elaborarea unei logici cu o singură valoare şi anume adevărul. Varianta lui Onicescu, asemănătoare şi cu aceea a lui Griss, presupunînd deci excluderea negaţiei şi conţinînd chiar anumite idei de tip intuiţionist în legătură cu experienţa matematică mentală, nu este totuşi intuiţionistă în adevăratul sens al cuvîntului, ci are numai o legătură indirectă cu tezele intuiţioniste.

Varianta susţinută de Février este restrictivă. Ea se limitează la calea directă de obţinere a paralelismului matematico-lingvistic ceea ce face imposibilă admiterea constantelor atestate. Restricţiile determină apoi şi admiterea altor logici care nu mai au nimic comun cu intuiţionismul.

Varianta lui Griss, care identifică negația cu falsul și o exclude, se dovedește tot monovalentă. Ea presupune însă într-un orizont mai larg decît cel oferit de Février posibilitatea evitării negației = falsul prin postularea exactității limbajului și a imposibilității erorii, lucru posibil numai în cadrul unei teorii matematice constituite. Însă matematica intuiționistă nu este o teorie, ci o activitate.

Poziția cea mai apropiată de aceea a logicii obișnuite este a lui Heyting, care admite și adevărul și falsul, acesta din urmă fiind însă identic cu negația. Ce-i drept, în spirit intuiționist, adevărul la Heyting coincide cu ceea ce am numit atestabilitate sau demonstrabilitate, stabilit fiind faptul că entitățile matematice nu sînt gata constituite pentru a putea fi comparate cu limbajul matematic.

În fine, atît la Heyting cu oscilații, cît mai ales la Barzin și Errera apare problema nedecidabilelor care sugerează trivalența.

Admiterea acestor puncte de vedere și dezvoltarea lor consecventă pe treapta imediat superioară paralelismului matematico-lingvistic duce la elaborarea a tot atîtea logici intuiționiste. În continuare vor fi urmărite *numai* acelea care corespund în mai mare măsură tezelor intuiționiste.

f) *Specificul variabilelor propoziționale intuiționiste*

Pe calea directă a obținerii paralelismului matematico-lingvistic variabilele propoziționale sau combinațiile lor se obțin prin generalizarea constantelor propoziționale. Expresiile asertate sau atestate, de exemplu $L_t\,\alpha$, $L_t\,\beta$, $L_t\,\gamma, \ldots$ pot fi generalizate prin variabila propozițională *a*. În cadrul expresiilor constante complexe, fiecare constantă propozițională diferită este generalizată printr-o variabilă diferită : $L_t\,\alpha$ prin *a*, $L_t\,\beta$ prin *b*, $L_t\,\gamma$ prin *c*, . . . Aceasta nu înseamnă că expresiile devin echivalente, ci înseamnă că în formula care conține, de exemplu, două variabile sau trei, trebuie să apară două sau trei constante diferite. Dacă este vorba de expresia constantă

(11) $$(L_t\,\alpha \wedge L_t\,\beta) \supset L_t\,\gamma,$$

ea poate fi generalizată prin

(3) $$(a \wedge b) \supset c.$$

Expresia (3) nu reprezintă transcrierea expresiei (11), ci generalizarea ei, deoarece (3) nu transcrie numai expresia (11), ci şi expresia

(12) $$(L_t \delta \wedge L_t \zeta) \supset L_t \eta$$

şi *orice altă* expresie de această formă.

Expresiile negate $\neg \alpha$, $\neg \beta$, $\neg \gamma, \ldots$ pot fi generalizate prin variabila $\neg a$. Generalizarea expresiilor constante negate este analogă cu generalizarea celor asertate sau atestate.

Dar aceasta nu este decît una dintre variante, adică varianta de tip Brouwer, în care nu este vorba de valori de adevăr şi în care sînt admise constantele propoziţionale negate. Varianta lui Griss presupune interdicţia variabilelor negate $\neg a$, $\neg b$, $\neg c, \ldots$ cît şi a combinaţiilor cu variabile negate. Aceasta, deoarece sînt interzise constantele $\neg \alpha$, $\neg \beta$, $\neg \gamma, \ldots$ Varianta lui Onicescu presupune interdicţia variabilelor propoziţionale false. Iar în varianta lui Heyting apar variabile propoziţionale adevărate şi variabile propoziţionale false (= negate).

Făcînd abstracţie de variante, se constată că variabilele propoziţionale negate, sînt greu de justificat în context intuiţionist. Într-adevăr, admiţînd ambele căi de obţinere a paralelismului matematico-lingvistic se ajunge atît la constante asertate cît şi la constante atestate sau negate. Dar dintre acestea, odată obţinute, este evident că sînt *menţinute* numai aserţiunile sau constantele atestate. Ce sens ar avea menţinerea unor expresii cărora nu le corespund construcţii matematice efective (Brouwer) sau le corespund doar contradicţii (Heyting)? Obţinerea lor are sens, dar menţinerea lor nu. În această situaţie, ar fi tot atît de lipsită de sens *generalizarea* constantelor negate. Cu alte cuvinte, menţinerea constantelor negate şi generalizarea lor încalcă însuşi principiul paralelismului matematico-lingvistic. Duce la elaborarea unui limbaj fără corespondent matematic, ceea ce nu mai corespunde cerinţelor impuse de primele teze intuiţioniste.

Din acest punct de vedere, varianta lui Griss şi Février se dovedeşte aplicabilă şi pe treapta variabilelor propoziţionale, tot aşa varianta lui Onicescu. Dealtfel, cele două variante coincid la nivel propoziţional. Onicescu consideră că „obiectele" logicii sale constituie un sistem Σ_O. P, Q,... sînt propoziţii (variabile) iar $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}, \ldots$ sînt negaţiile lor; $\overline{P}$, $\widetilde{\overline{Q}}$, etc. nu sînt propoziţii ale sistemului[88]. Prin

[88] O. Onicescu, *op. cit.*, p. 46.

urmare, într-o formă sau alta, în ambele interpretări sînt respinse variabilele negate.

Cu toate acestea, modalitățile *specifice* în care sînt introduse variabilele negate în logica intuiționistă nu încalcă paralelismul matematico-lingvistic. Este vorba însă *numai* de varianta lui Brouwer și de varianta lui Heyting și nu de accepția obișnuită a negării unei variabile propoziționale.

În ácest sens, generalizarea unei constante propoziționale $\neg\alpha$, $\neg\beta$, $\neg\gamma, \ldots$ prin $\neg a$, deci obținerea lui $\neg a$ pe cale directă, specificîndu-se că $\neg a$ nu poate să stea niciodată decît *numai* pentru constante propoziționale negate, pune variabila propozițională negată, deși pe o altă treaptă de generalizare (stadiul al treilea al matematicii) în aceeași postură în care se găsea constanta propozițională negată în stadiul al doilea, respectiv în stadiul propriu-zis al paralelismului matematico-lingvistic. Cu alte cuvinte, în aceeași măsură în care era admisibilă sau nu constanta propozițională negată este admisibilă sau nu și variabila propozițională negată. Numai în cazul în care prin $\neg a$ s-ar înțelege negarea obișnuită, respectiv faptul că $\neg a$ ar fi adevărată cînd a este falsă și falsă cînd a este adevărată, atunci într-adevăr ea nu ar mai fi admisibilă.

Dar această situație nu apare în varianta lui Brouwer și nici în varianta lui Heyting. La Brouwer nu poate să apară, deoarece în varianta lui nu apar valorile de adevăr. La Heyting, înțelegînd prin negare falsul, $\neg a$ nu va putea fi niciodată adevărată, deci nu va putea fi înlocuită decît cu constante propoziționale false, respectiv $\neg\alpha$, $\neg\beta$, $\neg\gamma, \ldots$

Prin urmare, specificul variabilelor propoziționale intuiționiste $a, b, c, \ldots$ constă în aceea că ele generalizează numai constante propoziționale asertate sau atestate, în timp ce variabilele intuiționiste $\neg a$, $\neg b$, $\neg c, \ldots$ generalizează numai constante propoziționale negate. Deci variabila propozițională intuiționistă spre deosebire de variabila propozițională obișnuită, deși nu conservă conținutul concret al constantelor propoziționale, le menține (în terminologia lui Heyting) valoarea de adevăr ($a, b, c, \ldots$ nu pot fi niciodată false, iar $\neg a$, $\neg b$, $\neg c, \ldots$ nu pot fi niciodată adevărate).

Specificul constantelor propoziționale intuiționiste garantează, în cadrul trecerii de la stadiul doi, al paralelismului matematico-lingvistic, la stadiul trei, al construcțiilor lingvistice, respectarea tezelor intuiționiste, fie în forma extremistă a excluderii variabilelor negate, fie în forma determinării lor valorice.

Una dintre consecințele imediate ale respectării tezelor intuiționiste o constituie imposibilitatea apariției variabilelor propoziționale pentru constante nedecidabile, pentru simplul motiv că acestea din urmă nu pot fi obținute în cadrul paralelismului matematico-lingvistic și ca atare nu există nici un motiv pentru generalizarea lor. Aceasta înseamnă, în terminologia lui Heyting, că pe treapta intuiționistă a construcțiilor lingvistice nu poate să apară „negația slabă". $\neg$ *a* înseamnă deci à la Brouwer, o variabilă propozițională care poate fi înlocuită numai cu constante propoziționale negate, iar à la Heyting, că poate fi înlocuită numai cu constante propoziționale care implică o contradicție matematică.

Trebuie subliniat un fapt de mare importanță, care este adesea trecut cu vederea, și anume *deosebirea fundamentală* dintre *variabilele propoziționale formaliste p, q, r,...* și *variabilele propoziționale intuiționiste a, b, c,...* Primele stau pentru propoziții *în genere* (acestea pot fi matematice sau nu). Hilbert și Ackermann dau exemple ca : „2 este mai mic decît 3" și „zăpada este neagră". Variabilele propoziționale formaliste pot fi adevărate sau false (*p* poate să stea fie pentru „zăpada este albă", fie pentru „zăpada este neagră"; în primul caz *p* este adevărată, în al doilea *p* este falsă). Variabilele propoziționale intuiționiste stau *numai* pentru propoziții *matematice* constante *adevărate* (asertate sau atestate), ca „2 este mai mic decît 3" și niciodată pentru propoziții ca „zăpada este albă" deși ultima este adevărată. Deosebirea este și mai evidentă în cadrul negației : $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$,... stau de asemenea pentru propoziții adevărate sau false ($\sim p$ poate să însemne „este fals că «zăpada este albă»" sau „este fals că «zăpada este neagră»"; în primul caz $\sim p$ este falsă, în al doilea este adevărată, în timp ce $\neg$ *a*, $\neg$ *b*, $\neg$ *c*,... stau *numai* pentru propoziții matematice constante *false*, ca „3 este mai mare decît 2" și niciodată pentru propoziții ca „zăpada este neagră",deși ultima este o propoziție falsă.

Heyting, cu toate că menține toate caracteristicile variabilei intuiționiste, renunță în cele din urmă la notația inițială [89]. În loc de *a, b, c,...* el utilizează semnele formaliste *p, q, r,...* care pot da naștere la înțelegeri greșite. Astfel, pare curios faptul că negația nu este definită în raport cu variabilele (*p, q, r,...*), ci în raport cu constantele (α, β, γ,... în notația noastră). De asemenea, este curios faptul că negația și toate celelalte operații logice nu sînt definite în raport cu valorile de adevăr. Dacă se păstrează însă notația intuiționiste-

[89] *Vide* A. Heyting, *Intuitionism. An Introduction*, Amsterdam, 1966, p. 97.

nistă, atunci lucrurile devin clare : aici este vorba de variabile intuiţioniste şi de operaţii logice intuiţioniste, deci $p \neq a$; $q \neq b$; $r \neq c$;. . . şi $\sim p \neq \neg a$; $\sim q \neq \neg b$; $\sim r \neq \neg c$;. . .

Negaţia obişnuită se defineşte în funcţie de valorile de adevăr. Ea însăşi este, spre deosebire de negaţia intuiţionistă, *o funcţie de adevăr*. Din această cauză, negaţia obişnuită nu se identifică cu falsul : $\sim p$ nu înseamnă „este fals *p*" ; $\sim$ p este fals numai dacă *p* este adevărat şi este adevărat, dacă *p* este fals. Această situaţie poate fi redată prin jocul matricial al negaţiei, respectiv

p	$\sim p$
A	F
F	A

în care A = adevărul, iar F = falsul.

Din punct de vedere intuiţionist, $\neg a$ înseamnă întotdeauna *a* este fals, respectiv $\neg a$ poate fi înlocuit numai cu $\neg \alpha$, $\neg \beta$, $\neg \gamma$, iar *a* simplu înseamnă *a* este adevărat respectiv *a* poate fi înlocuit numai cu $\llcorner_t \alpha$, $\llcorner_t \beta$, $\llcorner_t \gamma$,. . . ceea ce înseamnă că *nu poate fi alcătuită nici o matrice valorică pentru negaţia intuiţionistă* ; *ea nu este o funcţie de adevăr*.

Admiterea variabilelor de acest tip, respectiv *a* şi $\neg a$, cu evitarea acelei negaţii slabe, transformă sistemul într-unul aparent *analog* celui bivalent. Într-adevăr, inexistenţa variabilelor pentru expresii de tip α^0 lasă impresia că ar fi valabilă alternativa sau *a* sau $\neg a$, iar a treia posibilitate nu există — ceea ce ar echivala cu principiul terţului exclus [90].

Mascînd însă specificul variabilelor propoziţionale intuiţioniste şi avînd întotdeauna în vedere acest lucru, analogia menţionată devine pur formală.

O variabilă *a* intuiţionistă nu are aceeaşi semnificaţie cu o variabilă *p* obişnuită. Ultima *nu este* adevărată sau falsă, dar poate deveni astfel prin înlocuirea ei cu o propoziţie oarecare. Deci *p*, prin definiţie, ca şi $\sim p$, poate fi sau adevărată sau falsă, presupunînd

[90] M. Barzin et. A. Errera, *Sur le principe du tiers exclu*, Archives de la Société Belge de Philosophie, 1929, p. 10.

astfel alternativa terțului exclus. În schimb *a* nu poate fi înlocuită decît cu propoziții matematice atestate. Ea nu lasă posibilitatea altei alternative. Tot astfel ¬ *a* nu poate fi înlocuită decît cu propoziții matematice negate. Chiar dacă am admite că *a* ar putea fi numai adevărată, pentru substituțiile permise, iar ¬ *a* ar fi numai falsă (deși numai la Heyting este permisă introducerea valorilor de adevăr), ar fi evident faptul că despre nici o variabilă propozițională intuiționistă nu se va spune că poate deveni „*sau* adevărată *sau* falsă", ci că poate deveni *numai* adevărată, dacă este de forma *a*, și poate deveni *numai* falsă, dacă este de forma ¬ *a*. Dar acest mod de exprimare (cu valori de adevăr) trebuie în genere evitat.

g) *Semnificația operațiilor logice*

Astăzi este admis faptul că operațiile logice în interpretare intuiționistă nu *sînt funcții de adevăr*. Ele sînt imposibil de conceput astfel și, ca atare, chiar din punct de vedere formalist, trebuie să fie distinse de operațiile clasice [91]. Deci nu numai negația, ci și restul operațiilor trebuie să fie notate cu simboluri speciale. Pînă în acest moment au fost utilizate următoarele simboluri pentru operații clasice : $\sim$ (negație) ; & (conjuncție) ; $\vee$ (disjuncție) ; $\rightarrow$ (implicație). Simbolurile intuiționiste vor fi : ¬ (negație) ; $\wedge$ (conjuncție) ; $\vee$ (disjuncție) ; $\supset$ (implicație). Ținînd cont de faptul că nici variabilele nu sînt identice (cele clasice : *p*, *q*, *r*, . . . ; cele intuiționiste : *a*, *b*, *c*. . .), este evident că deosebirile dintre cele două tipuri de operații logice trebuie să fie marcate la fiecare pas. Mai mult, operațiile intuiționiste trebuie să fie concepute și gîndite independent de cele clasice. Altfel nu se poate înțelege specificul lor. Heyting sugerează chiar posibilitatea utilizării unor *alte denumiri* pentru operațiile intuiționiste. Intuiționiștii, spune Heyting, nu vor obiecta, deoarece construcțiile lor mentale nu pot fi influențate de modalitatea exprimării lor. [92]

J. Myhill consideră că există două metode de *explicare* a operațiilor logice : una clasică [respectiv formalistă] în care sînt date condițiile de *adevăr* ale fiecărei operații și una intuiționistă în care

[91] *Cf.* D. Hilbert und W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer-Verlag, 1967, p. 30—31.
[92] A. Heyting, *Intuitionism in matematics*, p. 108.

sînt date condiţiile lor de *asertabilitate*[93]. Ilustrînd însă „asertabilitatea", Myhill utilizează numai variabile propoziţionale. Ce-i drept, el specifică faptul că pentru intuiţionist propoziţiile [expresiile constante] sînt „cunoscute a fi adevărate" sau „cunoscute a fi false" şi „cu valoare necunoscută pînă în prezent". Ultima remarcă denotă faptul că Myhill procedează totuşi în mod formalist, adică nu porneşte de la construcţiile matematice la expresiile lor.

Utilizînd „asertabilitatea" la nivelul variabilelor propoziţionale se ajunge însă la un tip de definiţii fără comprehensiune, căci este imposibilă asertarea *directă* a unei variabile propoziţionale.

Heyting utilizează şi el, în ultima lucrare de proporţii (*Intuitionism. An introduction*, 1966), metoda explicării operaţiilor logice prin asertabilitate, dar el nu asertează variabilele propoziţionale, ci constantele. Mai precis, el explică operaţiile cu variabile prin intermediul operaţiilor cu constante, ceea ce denotă un punct de vedere pur intuiţionist. Dar aceasta este numai *una* dintre variantele pe care le-a încercat Heyting.

Una dintre primele variante (1930) marchează un lucru interesant şi anume faptul că operaţiile logice intuiţioniste *nu pot fi definite una prin intermediul celeilalte*, cum se procedează de obicei.[94] R. Carnap, de exemplu, consideră că „implicaţia" este o *abreviere* a disjuncţiei cu un membru negat.[95] Astfel apare formula

(13) $$(p \rightarrow q) = (\sim p \vee q).$$

Formula (13) nu poate să apară în logica intuiţionistă, deoarece

(13′) $$(a \supset b) = (\neg a \vee b)$$

presupune

(14) $$((a \supset b) \supset (\neg a \vee b)) \wedge ((\neg a \vee b) \supset (a \supset b)).$$

Însă, arată Heyting[96], în logica intuiţionistă este valabilă

(4.46) $$(\neg a \vee b) \supset (a \supset b),$$

[93] J. Myhill, *The formalization of intuitionism*, în „La philosophie contemporaine", Firenze, 1968, p. 326.

[94] A. Heyting, *Die Formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, p. 44. Problema a fost reluată de M. Wajsberg, *Untersuchungen über den Aussagenkalkül von A. Heyting*, Wiadomosci matematyczne, 49, 1938 şi Mc Kinsey, *Proof of the independence of primitive symbols of Heyting's calculus of propositions*, Journal of symbolic logic, 4, 1939.

[95] Cf. R. Carnap, *Introduction to symbolic logic*, New York, 1958, p. 8.

[96] A. Heyting, *Loc. cit.*

dar nu mai este valabilă conversa, respectiv

(15) $$(a \supset b) \supset (\neg a \vee b).$$

Deci (14) nu poate fi susţinută intuiţionistic, ceea ce înseamnă că (13′) nu este valabilă în logica intuiţionistă.

Operaţiile logice nu sînt definite, ci *explicitate* drept concepute fundamentale. Astfel apar *patru* operaţii :

$a \supset b$, «din a urmează b»

$a \wedge b$, «a şi b»

$a \vee b$, «a sau b»

$\neg a$, «non a»[97].

În afară de adosul că fiecare operaţie este independentă una de cealaltă, Heyting încearcă să expliciteze mai amănunţit semnificaţia implicaţiei. «din a urmează b» ar însemna «dacă a este corect, atunci şi b este corect», enunţul avînd sens chiar dacă a şi b sînt expresii constante a căror corectitudine nu este cunoscută. Referindu-se apoi la variabile, Heyting tinde să expliciteze implicaţia prin condiţii de adevăr, doar atît că în loc de adevărat *(wahr)* zice corect *(richtig)*, ceea ce denotă o intenţie de tip formalist.

O a doua variantă este aceea a construcţiilor *ipotetice* sau a intenţiilor de construcţii, pe care Heyting o echivalează ulterior cu aceea a lui Kolmogorov[98]. Aici variabilele propoziţionale sînt socotite intenţii sau probleme. Heyting specifică, de data aceasta, că $(a \supset b)$ nu poate fi definită prin valori de adevăr, deoarece ea „este lipsită de sens în cazul în care valoarea lui a şi b este necunoscută"[99]. Această remarcă denotă renunţarea la semnificaţia formalistă a variabilelor din varianta precedentă.

În fine, în ultima variantă (1966) Heyting renunţă la interpretarea operaţiilor logice prin intenţii sau probleme. Dealtfel, acestea sînt modele ale logicii intuiţioniste, care trebuie să fie justificate prin această logică, nu să o justifice.

[97] *Ibidem*, p. 43.
[98] A. Heyting, *Les fondements des mathématiques*, p. 17.
[99] *Ibidem*, p. 16.

El explicitează operaţiile logice cu variabile propoziţionale prin operaţii cu constante propoziţionale, cărora le enunţă condiţiile de asertabilitate. În legătură cu conjuncţia, consideră că $(\alpha \wedge \beta)$ poate fi asertată dacă şi numai dacă poate fi asertată α şi β [100].

În sens intuiţionist, este vorba de două construcţii mentale: să zicem UNU PLUS UNU ESTE EGAL CU DOI şi UNU PLUS DOI ESTE EGAL CU TREI. Aceste construcţii sînt exprimate lingvistic prin „$1 + 1 = 2$" şi „$1 + 2 = 3$". Ele pot fi prescurtate prin $\llcorner_s \alpha$ şi $\llcorner_s \beta$, ambele fiind asertate. Explicaţia dată de Heyting ia forma „dacă are loc $\llcorner_s \alpha$ şi are loc $\llcorner_s \beta$, atunci are loc $\llcorner_s (\llcorner_s \alpha \wedge \llcorner_s \beta)$". Este însă evident că pe cale directă nu pot fi obţinute decît conjuncţii asertate. Într-adevăr, notînd cu $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ constantele care prescurtează propoziţiile matematice obţinute prin construcţii mentale se ajunge la o înşirare de genul $\llcorner_s \alpha, \llcorner_s \beta, \llcorner_s \gamma, \ldots$ Din acestea se pot grupa apoi conjuncţii cu doi, trei, patru... membri.

Dar, explicaţia lui Heyting este, din punctul nostru de vedere incompletă. Aici trebuie adăugată şi calea indirectă a *atestării*, altfel se rămîne la nivelul logicii fără negaţie (à la Février). Pe cale indirectă, adică pornind de la constante, care nu ştim dacă prescurtează sau nu expresii lingvistice care să exprime construcţii matematice efective, se poate ajunge la negarea lor. În această situaţie, dacă cel puţin unul dintre membrii unei conjuncţii este negat, conjuncţia *nu va fi atestată*. Să zicem că α prescurtează pe „$1 + 1 = 2$" iar β pe „$1 + 2 = 4$", atunci lui „$1 + 1 = 2$" îi corespunde construcţia UNU PLUS UNU ESTE EGAL CU DOI şi se obţine $\llcorner_t \alpha$ (atestat α), pe cînd „$1 + 2 = 4$" nu corespunde nici unei construcţii matematice, dar se poate obţine construcţia UNU PLUS DOI ESTE EGAL CU TREI, exprimată prin „$1 + 2 = 3$" şi prescurtată prin $\llcorner_s \gamma$ (asertat γ), care îl contrazice pe β, de unde se obţine $\neg \beta$. $\llcorner_t \alpha$ face parte dintr-un şir de constante atestate. Numai împreună cu una, să zicem $\llcorner_t \gamma$ (sau cu mai multe), dintre acestea, $\llcorner_t \alpha$ ar putea alcătui o conjuncţie atestată, ca $\llcorner_t (\llcorner_t \alpha \wedge \llcorner_t \gamma)$. Ea nu poate alcătui o conjuncţie atestată împreună cu $\neg \beta$, care face parte dintre constantele negate. Prin urmare conjuncţia lor trebuie negată, respectiv $\neg (\llcorner_t \alpha \wedge \neg \beta)$, care ar însemna că $\llcorner_t \alpha$ şi $\neg \beta$ nu pot face parte din succesiunea de constante propoziţionale atestate. Cu atît mai puţin vor face parte din această succesiune două constante negate, ca $\neg \alpha$ şi $\neg \beta$, de unde urmează $\neg (\neg \alpha \wedge \neg \beta)$.

[100] A. Heyting, *Intuitionism. An introduction*, p. 98.

Prin urmare, pe cale asertivă se obţin numai conjuncţii asertate ; pe calea atestării se pot obţine şi conjuncţii atestate şi conjuncţii negate. Introducerea variabilelor înseamnă din punct de vedere intuiţionist *generalizarea* acestor rezultate. Astfel $(a \wedge b)$ înseamnă o conjuncţie asertată sau atestată, căci a şi b pot fi înlocuite numai cu constante asertate sau atestate, în timp ce $\neg (a \wedge \neg b)$ sau $\neg (\neg a \wedge b)$ sau $\neg (\neg a \wedge \neg b)$ reprezintă conjuncţii negate, căci cel puţin unul dintre termeni trebuie înlocuit cu o constantă negată.

Se ajunge astfel la o situaţie curioasă. Deşi interpretarea conjuncţiei, în cazul constantelor, dădea impresia unei analogii cu interpretarea prin condiţii de adevăr (dacă s-ar identifica asertarea şi atestarea cu adevărul, iar negarea cu falsul), în cazul variabilelor intuiţioniste, $(a \wedge b)$ este asertată şi atestată *oricînd*, deoarece a şi b pot fi înlocuite numai cu constante asertate sau atestate. Expresia analogă $(p \,\&\, q)$ din logica formalistă *nu poate fi mereu adevărată*, deoarece p şi q pot fi înlocuite cu constante a căror valoare de adevăr nu este cunoscută. Deci p sau q poate fi înlocuit cu o constantă care prescurtează o expresie falsă. În plus, celelalte cazuri intuiţioniste $(a \wedge \neg b)$; $(\neg a \wedge b)$; $(\neg a \wedge \neg b)$ sînt *întotdeauna* negate, căci conţin cel puţin o variabilă care trebuie înlocuită cu o constantă negată ; în schimb formulele analoge $(p \,\&\, \sim q)$; $(\sim p \,\&\, q)$; $(\sim p \,\&\, \sim q)$, ca şi $(p \,\&\, q)$ pot fi *uneori* adevărate *alteori* false.

Formulînd rezultatele obţinem :

$$\sqsubset (a \wedge b)$$

$$\neg (a \wedge \neg b)$$

$$\neg (\neg a \wedge b)$$

$$\neg (\neg a \wedge \neg b).$$

Semnul „$\sqsubset$” înseamnă „asertat sau atestat”.

La o situaţie analogă se ajunge şi în cazul celorlalţi operatori logici. În cazul disjuncţiei, pe cale asertivă, nu se poate imagina decît situaţia în care ambii membri ai disjuncţiei sînt asertaţi, deci $\llcorner_s \alpha$ sau $\llcorner_s \beta$ şi, prin urmare $\llcorner_s (\llcorner_s \alpha \vee \llcorner_s \beta)$. Semnificaţia unor astfel de disjuncţii poate fi imaginată de exemplu în cazul *alternativelor* de operaţii cu acelaşi rezultat. Să zicem că este vorba de „$1 + 2 = 3$” şi „$2 + 1 = 3$”, prescurtate prin $\llcorner_s \alpha$ şi respectiv $\llcorner_s \beta$. În situaţia

atestării, unul sau amîndoi membrii disjuncţiei pot fi negaţi. Dacă este negat numai unul respectiv este negat α, şi este atestat β, să zicem că α înseamnă „$1 + 2 = 9$'' iar β înseamnă „$1 + 2 = 3$'', înseamnă că se obţine rezultatul dorit, menţinînd β şi respingînd α şi deci este atestată alternativa $\llcorner_t(\neg\alpha \vee \llcorner_t\beta)$; tot aşa în cazul $\llcorner_t(\llcorner_t\alpha \vee \neg\beta)$. Numai cînd ambii membri sînt negaţi nu poate fi obţinut rezultatul dorit; în cazul cînd α înseamnă „$1 + 2 = 9$'', iar β înseamnă „$1 + 2 = 4$'', atunci negăm disjuncţia, respectiv $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$. Utilizînd variabile intuiţioniste pot fi formulate următoarele rezultate

$$\sqsubset (a \vee b)$$

$$\llcorner_t(\neg a \vee b)$$

$$\llcorner_t(a \vee \neg b)$$

$$\neg(\neg a \vee \neg b).$$

Cazul implicaţiei poate fi ilustrat cel mai simplu printr-o operaţie matematică în care α prescurtează „$1 + 2 = 3$'' iar β pe „$2 + 1 = 3$''. Fiind asertat α, este asertat şi β. Heyting încearcă explicaţia utilizînd o a *treia* construcţie (γ), care ar putea fi, „$(2 + 1 = 3) = (1 + 2 = 3)$''. În acest caz, spune Heyting, cînd există o construcţie γ astfel încît ea să presupună automat odată cu construcţia lui α şi construcţia lui β, atunci este asertată implicaţia de la α la β. În terminologia noastră: dacă întotdeauna cînd are loc $\llcorner_s\alpha$, are loc şi $\llcorner_s\beta$, atunci are loc şi $\llcorner_s(\llcorner_s\alpha \supset \llcorner_s\beta)$. Aceeaşi situaţie apare şi în cazul atestării: dacă întotdeauna cînd are loc $\llcorner_t\alpha$, are loc şi $\llcorner_t\beta$, atunci are loc şi $\llcorner_t(\llcorner_t\alpha \supset \llcorner_t\beta)$.

Cazul în care α ar fi negat şi β asertat sau atestat nu poate să apară, căci dacă are loc o contradicţie nu se poate să aibă loc prin aceasta şi o construcţie matematică efectivă, şi tot astfel în cazul în care α ar fi asertat sau atestat şi β ar fi negat.

Cu atît mai evident este cazul în care atît α cît şi β ar fi negate. S-ar obţine atunci o relaţie între două expresii lingvistice fără corespondent matematic. Admiterea unei astfel de relaţii nu ar mai corespunde paralelismului matematico-lingvistic.

Implicaţia astfel interpretată nu mai are nimic comun cu cea obişnuită. Generalizat, nici măcar cazul $(a \supset b)$ nu este întotdeauna atestabil.

Ce-i drept, aici ar putea fi introdusă, deşi acest lucru nu se face de regulă, şi un fel de implicaţie *mai puţin strictă*, care ar permite în mai multe cazuri atestabilitatea şi asertabilitatea formulei $(a \supset b)$. S-ar putea considera că $(\alpha \supset \beta)$ este asertată sau atestată, dacă fiind asertat sau atestat α, poate fi asertat sau atestat şi β, dar nu numai *pentru* sau *prin faptul* că a fost asertat sau atestat β, ci şi *ca urmare* a acestui fapt. Să zicem că este vorba de o succesiune de operaţii în care unui număr par i se adaugă o unitate, obţinîndu-se un număr impar : „$2 + 1 = 3$"; „$4 + 1 = 5$"; „$6 + 1 = 7$";..., prescurtat $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ În acest caz, s-ar putea considera că fiind asertat α, este asertat şi β, ca urmare a continuării acestui procedeu, de unde va avea loc şi $\llcorner_s(\llcorner_s \alpha \supset \llcorner_s \beta)$.

O formă *şi mai puţin strictă* a implicaţiei ar putea fi introdusă prin enunţuri de tipul : dacă este asertat sau atestat α, şi este asertat sau atestat şi β, atunci este asertat sau atestat şi $(\alpha \supset \beta)$; de unde ar urma $\sqsubset (a \supset b)$. Acest caz nu poate să aibă însă loc în logica intuiţionistă, deoarece ar determina identitatea conjuncţiei cu implicaţia, căci în ambele cazuri ar fi asertate sau atestate doar formulele care nu conţin termeni negativi.

Menţinînd deci semnificaţia intuiţionistă mai mult sau mai puţin strictă a implicaţiei obţinem următoarele rezultate :

$$\perp (a \supset b)$$

$$\neg (\neg a \supset b)$$

$$\neg (a \supset \neg b)$$

$$\neg (\neg a \supset \neg b).$$

Semnul „$\perp$" înseamnă „consistent". El stă în faţa unei formule care poate fi uneori asertată sau atestată, dar alteori negată, cum este cazul formulei $(a \supset b)$. În ciuda faptului că părţile sale componente, respectiv a şi b, pot fi înlocuite numai cu constante propoziţionale atestate sau asertate, $(a \supset b)$ este, de cele mai multe ori, negată. Căci, în accepţia intuiţionistă oricît de tolerantă, ea va fi negată de exemplu în cazul cînd a e înlocuit cu α care prescurtează „$1 + 2 = 3$", iar b cu β care prescurtează „$5 + 3 = 8$". Acest lucru ar fi imposibil din perspectiva clasică a implicaţiei materiale ; ambele componente fiind clasic adevărate.

În contextul logicii intuiţioniste nu am întîlnit discuţii în legătură cu *alte* operaţii logice decît: implicaţia, conjuncţia, disjuncţia şi negaţia. Faptul că acestea sînt introduse comprehensiv fac lipsită de sens intuiţionist introducerea operaţiilor logice prin joc combinatoric. În schimb, există variante, ca aceea a lui Griss, în care nu mai apare disjuncţia [101].

Eliminarea disjuncţiei este o consecinţă a eliminării negaţiei, căci aceasta determină reducerea operaţiilor la formele pozitive $a \supset b$, $a \wedge b$ şi $a \vee b$, celelalte cazuri fiind imposibile. Dar, în această situaţie numai implicaţia şi conjuncţia au semnificaţii determinate. Admiterea disjuncţiei ($a \vee b$), în care a şi b sînt întotdeauna adevărate, trebuie să coincidă cu atestarea sau asertarea ei, deci $\sqsubset (a \vee b)$. Dar şi conjuncţia $a \wedge b$ semnifică acelaşi lucru. Numai implicaţia ($a \supset b$) poate fi falsă, în ciuda faptului că ambele sale componente sînt adevărate. Ea este falsă, de exemplu, atunci cînd construcţia matematică pe care o exprimă un enunţ prescurtat cu a nu presupune în acelaşi timp construcţia matematică pe care o exprimă un enunţ prescurtat cu b. O altă particularitate a logicii lui Griss o constituie, în mod evident, faptul că nu conţine nici formule negate şi nici formule consistente. Orice formulă din logica lui este întotdeauna adevărată.

În varianta lui Onicescu apare şi disjuncţia, dar fără enunţarea condiţiilor de asertabilitate. „Disjuncţia $P \vee Q$ între două propoziţii P şi Q este o propoziţie din Σ_0 în acelaşi timp cu P şi Q" [102]. Ea trebuie să satisfacă anumite proprietăţi (de idempotenţă, comutativitate şi asociativitate). Dar aceleaşi condiţii se impun şi pentru conjuncţie, ceea ce face ca distincţia lor să apară abia în raport cu implicaţia, deci în cazul unor formule mai complexe.

h) *Semnificaţia generală a teoriei intuitive*

Metoda explicitării prin asertabilitate duce, în variantele lui Brouwer şi Heyting, la patru *tipuri* de formule: (1) *asertate sau atestate*, ca $\sqsubset (a \wedge b)$ şi $\sqsubset (a \vee b)$, (2) *atestate fără a fi asertate*, ca $\llcorner_t (a \vee \neg b)$ şi $\llcorner_t (\neg a \vee b)$, (3) *consistente*, ca $\perp (a \supset b)$ şi (4) *negate*, ca $\neg (a \wedge \neg b)$.

[101] G. F. C. Griss, *Logique des mathématiques intuitionistes sans négation*, Comptes rendus de l'Acad. Sc., Paris, 227, 1948, p. 947.
[102] O. Onicescu, *op. cit.*, p. 47.

Ţinînd cont de semnificaţia specială a operaţiilor intuiţioniste poate fi precizat şi tipul *altor* formule simple. Într-o logică *strictă* a matematicii intuiţioniste toate formulele se obţin pornind de la generalizarea rezultatelor matematice obţinute şi, pe cît posibil, de la generalizarea raţionamentelor utilizate. De regulă însă se porneşte de la formule obişnuite în logica simbolică şi se caută semnificaţia lor intuiţionistă. Aşa procedează, de exemplu, Kolmogorov [103] în legătură cu formula implicativă $a \supset (\neg a \supset b)$. Aceasta se dovedeşte foarte uşor că este de tipul (4), dacă se admite semnificaţia strictă a implicaţiei. Într-adevăr $(\neg a \supset b)$ este o formulă de tipul (4), adică negată, care nu poate fi implicată de o variabilă atestată (a). Deci întreaga formulă trebuie negată.

În schimb, formula $a \supset (b \supset a)$, pe care Kolmogorov o consideră valabilă şi care apare şi la Heyting drept axiomă, nu poate fi de tipul (4) decît dacă se admite semnificaţia *cea mai puţin strictă* a implicaţiei. Atunci $(b \supset a)$ este asertată, iar implicaţia între două aserţiuni, a şi $(b \supset a)$, trebuie asertată. Dacă implicaţia este admisă numai cu semnificaţie strictă, atunci $(b \supset a)$ este consistentă, dar o aserţiune care nu implică o altă aserţiune, nu poate fi asertată.

Într-o situaţie asemănătoare se găseşte şi formula $\neg a \supset (a \supset b)$ care poate fi asertată numai în cazul în care ar fi asertate formule ca $(\neg a \supset \neg b)$ şi $(\neg a \supset b)$, căci $(a \supset b)$ fiind consistentă poate să ducă prin substituţie cu constante propoziţionale atît la formule negate, cît şi la formule asertate. Or, în mod normal, nu se poate ca $\neg a$ să implice o aserţiune (cînd $(a \supset b)$ ar fi asertat), iar faptul că o contradicţie implică o altă contradicţie nu prezintă nici un interes.

Toate acestea dovedesc faptul că, în ciuda definiţiei care se dă de regulă implicaţiei intuiţioniste, aceasta este tratată, în anumite cazuri, drept implicaţie materială, ceea ce face ca nu numai semnificaţia implicaţiei, ci şi aceea a variabilelor propoziţionale intuiţioniste, să fie denaturate.

Ce semnificaţie ar putea să aibă într-o logică a matematicii intuiţioniste o formulă ca $a \supset (a \wedge a)$? Aceasta poate fi într-adevăr atestată în orice accepţie, ca şi $(a \supset a)$ sau $(a \vee a)$, dar în matematică, chiar şi în cea uzuală, nu apar niciodată astfel de înşirări ale uneia şi aceleiaşi propoziţii. Ce-i drept, Heyting menţionează faptul că o astfel de formulă trebuie acceptată ca valabilă în mod arbitrar *(Willkürlich als richtig angenommen)* [104]. Dar acceptarea arbitrară

[103] A. N. Kolmogorov, *On the principle of excluded middle*, p. 420—421.
[104] A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, p. 45.

a unei formule nu are nimic comun cu maniera intuiţionistă şi încalcă în mod evident teza (IV). Mai precis, în ciuda lipsei de contradicţie a unor astfel de formule, ele nu vor fi obţinute niciodată pe linie directă, ca aserţiuni, şi chiar dacă indirect, prin atestare, ele sînt admisibile, deci nu încalcă prescripţiile cerute de interpretarea intuiţionistă a operaţiilor logice, lor nu le mai corespunde ceva analog în matematica propriu-zisă. Dar aceasta înseamnă că este încălcată şi teza (III), care garantează paralelismul matematico-lingvistic.

Probleme de acelaşi gen apar în legătură cu *multiplicarea negaţiei*. S-a constatat deja faptul că negaţia în genere ridică probleme dificile în logica matematicii intuiţioniste. Dubla şi tripla negaţie nu fac decît să sporească aceste dificultăţi.

Pe cale directă, asertivă nu poate fi obţinută negaţia decît neintenţionat, prin eroare. Ea, semnificînd faptul că o expresie contrazice altă expresie căreia îi corespunde o construcţie matematică efectivă, se verifică pe cale indirectă.

Adăugarea de negaţii are sens numai în logica obişnuită, unde negaţia joacă rol de *inversator valoric*. $\sim p$ înseamnă ,,este fals p'', iar p, putînd fi adevărat sau fals, înseamnă că $\sim p$ poate fi adevărată sau falsă. $\sim \sim p$ înseamnă ,,este fals că este fals p'', ceea ce este echivalent cu simplul p (adică cu ceva adevărat sau fals). Tripla negaţie se reduce la simpla negaţie, respectiv $\sim \sim \sim p = \sim p$. Dar aceste reduceri, la p şi $\sim p$, a oricărui şir de negaţii a lui p, pare, chiar şi în logica obişnuită, ceva artificial şi inutil.

În realitate, şirul negaţiilor nu se adaugă arbitrar. Posibilitatea şi chiar necesitatea aplicării de negaţii duble rezidă, în logica obişnuită, tocmai în *nedeterminarea valorică* a variabilei propoziţionale. Aceasta permite *negarea ei ipotetică*, care se dovedeşte falsă, cînd variabila este înlocuită cu o propoziţie adevărată, ceea ce necesită *negarea negaţiei iniţiale*.

În logica matematicii intuiţioniste nu apar variabile propoziţionale nedeterminate, ceea ce nu permite negarea lor ipotetică şi deci nici dubla lor negare. Problema triplei negări se pune cu atît mai puţin.

Poate fi remarcat aici faptul interesant că admiterea intuiţionistă a erorii, care garantează în fond utilizarea negaţiei intuiţioniste, permite mai degrabă *afirmarea ipotetică* a propoziţiilor (respectiv asertarea lor ipotetică), care urmează să fie apoi *confirmată*, ceea ce sugerează o *afirmare a afirmării*.

Din acest punct de vedere, nu numai formule ca $\neg \neg a \supset a$ nu sînt acceptabile, ci şi formule ca $a \supset \neg \neg a$, $\neg a \supset \neg \neg \neg a$

sau $\neg\neg\neg a \supset \neg a$, care nu au nici o semnificaţie atîta timp cît prin „$\neg$" nu se înţelege falsul, iar prin a se înţelege o variabilă care poate fi înlocuită numai cu propoziţii asertate.

În cazul negaţiei, ca şi al implicaţiei, se constată oscilaţii, la reprezentanţii logicii intuiţioniste, în legătură cu semnificaţia precisă a operaţiei şi a variabilei propoziţionale pe care o determină. În mod obişnuit, „$\neg$" trebuie să însemne cu totul altceva decît „$\sim$", ca şi „a" faţă de „p", dar multe formule acceptate în logicile intuiţioniste dovedesc că aceste lucruri sînt ignorate. Aceasta este şi cauza pentru care se reproşează intuiţioniştilor faptul că exclud *arbitrar* anumite formule, acceptînd în schimb altele, echivalente cu acestea sau de forme asemănătoare. Respectarea strictă a tezelor intuiţioniste justifică *necesitatea* şi oferă criterii precise ale excluderii acestor formule, dar nu direct, ci prin construcţia efectivă a unei logici corespunzătoare matematicii intuiţioniste.

Un caz special îl constituie şi formula $(a \vee \neg a)$, care este de tipul (2), ca şi $(a \vee \neg b)$, deci o formulă atestată fără a fi asertată. Dacă se admite acest lucru, atunci $(a \vee \neg a)$ *nu poate juca rolul corespunzător unei tautologii* din logica obişnuită (acest rol revenind formulelor de tipul (1) — asertate sau atestate). În acelaşi timp $(a \vee \neg a)$ *nu este o formulă negată*. Acest lucru corespunde întru totul tezei (VI).

Dar modul concret în care se lucrează de regulă cu disjuncţia, în logicile intuiţioniste, fără să se facă distincţia dintre asertare şi atestare, chiar modul în care o defineşte Heyting, ca asertabilă cînd *unul* dintre membri este asertat, nu mai justifică respingerea formulei $(a \vee \neg a)$, căci aceasta are în mod evident primul membru asertat. De aici decurge necesitatea excluderii lui $(a \vee \neg a)$ cu alte mijloace decît cele pe care le poate oferi o teorie intuitivă.

Logica matematicii intuiţioniste, expusă în forma unei teorii intuitive, poate fi dezvoltată în continuare cu ajutorul mijloacelor formale obişnuite, ceea ce nu mai presupune nimic deosebit. Problema centrală era aceea de a obţine forme de bază, cu semnificaţie strict intuiţionistă, respectiv obţinerea paralelismului matematico-lingvistic, a unui limbaj al matematicii intuiţioniste şi garantarea faptului că dezvoltarea lui ulterioară, cu mijloace pur logice, nu duce la construcţia unui limbaj fictiv, fără o semnificaţie determinată. Dezvoltarea teoriei intuitive presupune în primul rînd condiţiile de construcţia a formulelor acceptabile, selectarea raţionamentelor generale, a principalelor reguli de operaţie şi apoi găsirea unor metode,

mai mult sau mai puţin simple, de decizie (de precizare a tipului de formulă obţinută).

Logica matematicii intuiţioniste, în calitate de teorie intuitivă este strict fundamentată pe tezele intuiţioniste. Cu toate acestea, ea nu este o teorie *unică*. Ceea ce s-a urmărit pînă în acest moment a fost obţinerea unei teorii generale, faţă de care cele cunoscute (variante de tip Brouwer, Heyting, Griss, Onicescu, Février — cu excepţia celor speciale polivalente: Gonseth, Barzin, Errera) să poată fi încadrate şi deci justificate.

Construcţia *efectivă* a teoriei intuitive presupune depăşirea punctului de vedere principial, adoptat în lucrarea de faţă. Paralelismul matematico-lingvistic trebuie nu numai garantat, justificat, fundamentat, ci şi construit în mod efectiv. Dar aceasta nu mai este o activitate pur logică, ea revine mai degrabă matematicianului intuiţionist decît logicianului. Iar în conformitate cu teza (I), ea este o activitate secundară, pe care acesta o îndeplineşte numai în măsura în care încearcă *expunerea* rezultatelor şi nu *obţinerea* lor. Aceasta înseamnă că logica matematicii intuiţioniste, ca teorie intuitivă, interesează totuşi în mai mare măsură pe logician decît pe matematician. Altfel spus, fundamentele teoriei intuitive sînt mai importante decît construcţia ei efectivă. Şi dacă matematica intuiţionistă nu are mare lucru de cîştigat de pe urma unei astfel de teorii, logica în genere are un profit substanţial.

Semnificaţia constantelor propoziţionale intuiţioniste, respectarea cu stricteţe a paralelismului matematico-lingvistic, ne-a prilejuit *distincţia fundamentală dintre asertare şi atestare*. Pe baza acesteia am reuşit să surprindem şi să justificăm principalele subtilităţi legate de negarea constantelor propoziţionale, cu variantele ei, de constantele propoziţionale nedecidabile, de specificul variabilelor şi al operaţiilor logice intuiţioniste.

Teoria intuitivă, astfel concepută, se dovedeşte suficientă pentru justificarea aserţiunilor de bază ale logicii intuiţioniste şi pentru infirmarea principiilor suspecte. Ea dovedeşte în acelaşi timp şi faptul că ignorarea unei astfel de teorii intuitive determină inconsecvenţa în menţinerea fermă a specificului intuiţionist a variabilelor şi a operaţiilor logice şi permite apariţia unor formule *arbitrare*, perfecte din punct de vedere formal dar necorespunzătoare paralelismului matematico-lingvistic.

Teoria expusă conţine însă numai ceea ce se numeşte de regulă „logica propoziţiilor". Ea este de fapt capitolul cel mai semnificativ

al logicii intuiţioniste. Logica intuiţionistă a „predicatelor" nu este însă o simplă aplicaţie a logicii propoziţiilor, la care se adaugă cele două axiome specifice, cum ar reieşi din Σ_{Hy}, prezentat deja. Încadrarea ei într-o teorie intuitivă ridică de asemenea probleme interesante din punct de vedere logic. Cu toate acestea, logica predicatelor trebuie privită, în contextul lucrării de faţă, drept un capitol asupra căruia nu se insistă în mod special, urmărindu-se concentrarea asupra problemelor fundamentale ale logicii intuiţioniste.

i) *Semnificaţia formelor predicative*

Despre constantele individuale intuiţioniste (α_i, β_i, γ_i,...) şi despre variabilele individuale intuiţioniste (a_i, b_i, c_i,...) s-a vorbit deja (*vide* paragraful *b*). Introducerea lor nu ridică probleme speciale.

O constantă intuiţionistă α_i prescurtează o expresie matematică $\mathfrak{A}_i$ care exprimă o construcţie matematică A_i, conform relaţiei

$$(6') \qquad (A_i) \twoheadrightarrow (\mathfrak{A}_i) \twoheadrightarrow (\alpha_i)$$

Relaţia este analogă cu (6). Deosebirea constă în faptul că A_i este o construcţie *simplă* de entităţi matematice, a cărei expresie $\mathfrak{A}_i$ nu poate lua o formă propoziţională.

Din punct de vedere intuiţionist nu există însă o deosebire esenţială între construcţiile matematice de tip A şi cele de tip A_i. Ambele sînt „adevăruri matematice", sînt rezultate ale unui proces mental intuitiv. Dealtfel, construcţia intuitivă A_i, căreia îi corespunde expresia „3", este tot atît de complicată, în accepţie intuiţionistă, ca şi construcţia A, căreia îi corespunde expresia „2 + 1 = 3".

Cu toate acestea, la nivelul constantelor individuale intuiţioniste nu apare problema distincţiei dintre *asertare* şi *atestare*. Aceasta înseamnă că nu se poate vorbi de o *cale indirectă* de obţinere a paralelismului matematico-lingvistic la nivelul constantelor intuiţioniste. Într-adevăr, expresiile de tip $\mathfrak{A}_i$ pot fi simple semne hieroglifice, ca semnele numerelor naturale, care sînt *arbitrare*. Ele exprimă entităţi matematice numai în măsura în care aceste entităţi au fost construite deja. Deci ori de cîte ori apar expresii de tip $\mathfrak{A}_i$ se presupune că ele exprimă construcţii efectuate deja. Mai precis, ele sînt expresii de tip $\mathfrak{A}_i$, în măsura în care exprimă astfel de construcţii şi *numai* în această măsură.

În consecință, constantele individuale intuiționiste prescurtează numai expresii de tipul amintit și joacă oarecum rol de „constante individuale asertate". Dar acest fapt nu mai trebuie marcat printr-un semn special, căci indicele „*i*" este suficient. În orice caz, o constantă de tip α_i nu poate să prescurteze altceva decît expresii *matematice* de tip $\mathfrak{A}_i$.

Variabilele individuale intuiționiste reprezintă generalizarea constantelor individuale. O variabilă individuală intuiționistă $\mathfrak{A}_i$ poate fi înlocuită cu orice constantă individuală intuiționistă, respectiv cu orice constantă care prescurtează o expresie de tip $\mathfrak{A}_i$, care exprimă o construcție matematică A_i efectuată deja.

Nu am întîlnit nici o discuție în legătură cu *negarea* constantelor intuiționiste individuale, imposibilă în contextul căii directe (6′) și nici în legătură cu *constante negative* intuiționiste. Aceasta înseamnă că, intuiționistic, nu are nici un sens denumirea de „numere negative". Semnul „—", care le însoțește, are deci semnificație pozitivă.

O problemă mai dificilă este aceea a introducerii *proprietăților*, reduse și ele la *proprietăți matematice*, cum ar fi: „impar", „divizibil" etc., dintre care, unele sînt relaționale ca: „mai mare decît 4", „egal cu 2" etc. B. von Rootselaar consideră însă că aceste proprietăți nu constituie construcții matematice propriu-zise. „Reprezentarea proprietăților", pe care le au entitățile matematice nu mai este „o activitate fundamentală pur constructivă" [105]. Fără să dezvolte acest punct de vedere, Rootselaar admite soluția lui G. Kreisel [106], după care proprietățile pot fi stabilite prin *compararea* a două construcții matematice.

Dar, în acest sens, nu numai construcțiile de tip A_i au proprietăți, ci și cele de tip A. Ceea ce înseamnă că proprietățile matematice, ale căror expresii le prescurtăm prin *constantele predicative* P, Q, R,... pot fi asociate ambelor tipuri de construcții, și deci P, Q, R,... pot fi asociate la rîndul lor atît constantelor de tip α_i, cît și a celor de tip α. Dar în acest caz, proprietățile în discuție trebuie să fie de *alt* tip. Acest lucru poate fi menționat printr-o notație specială, cum ar fi P_i, Q_i, R_i,... pentru constantele care prescurtează expresiile proprietăților asociate construcțiilor de tip A_i. Datorită faptului că nu vom

[105] B. van Rootselaar, *Intuitives über den Intuitionismus*, Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, 2, 1965, p. 158.

[106] *Cf.* G. Kreisel, *Foundations of intuitionistic logic*, în „Logic, methodology and phylosophy of sciences", Standford, 1962.

intra în detaliile calculului cu predicate, facem abstracţii de aceste distincţii, precizînd doar faptul că, utilizînd numai constante individuale, constantele predicative P, Q, R,... vor fi corespunzătoare acestora.

Obţinerea proprietăţilor matematice prin comparare presupune cel puţin două construcţii matematice. Una dintre cele mai simple proprietăţi rezultă din compararea construcţiilor succesive UNU şi DOI. Lui DOI i se poate asocia imediat proprietatea „succesorul lui UNU". Esenţial este aici, din punct de vedere intuiţionist, că proprietatea matematică *nu poate să existe înaintea* construcţiilor matematice efective şi nici *independent* de aceste construcţii.

Comparînd deci expresiile predicative obişnuite de tip $F(a)$ cu cele intuiţioniste de tip $P(a_i)$, constatăm (1) că F reprezintă o proprietate oarecare, pe cînd P numai o proprietate matematică şi (2) că a reprezintă o constantă individuală oarecare, pe cînd a_i numai o constantă individuală matematică, respectiv o construcţie matematică simplă.

Acest lucru nu este însă marcat întotdeauna, ceea ce face dificilă înţelegerea expresiilor predicative intuiţioniste şi imprimă un caracter arbitrar restricţiilor ulterioare. Heyting, de exemplu, care utilizează iniţial pentru variabilele propoziţionale notaţia a, b, c,... foloseşte pentru expresiile predicative notaţia $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$,..., fără precizări suplimentare [107]; ulterior, utilizînd notaţia p, q, r, ... pentru variabilele propoziţionale introduce notaţia $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ pentru expresiile predicative [108]. În aceste cazuri nu apare însă distincţia dintre variabila propoziţională şi variabila predicativă. Această distincţie este marcată de regulă în logicile obişnuite. Hilbert şi Ackermann, de exemplu, notează variabilele propoziţionale cu A, B, C,..., iar pe cele predicative cu F, G, H,... După B. van Rootselaar, variabila propoziţională stă pentru *construcţii matematice efective*, iar cea predicativă pentru *proprietăţi*, care se obţin prin compararea primelor. Aceasta înseamnă că în logica intuiţionistă ar trebui să existe o diferenţă şi mai accentuată între cele două tipuri de variabile. În plus, utilizarea lui x ca variabilă individuală poate să ducă la confuzii, el reprezentînd de regulă *orice* constantă individuală.

O altă neînţelegere poate să rezulte din faptul că, aşa cum consideră Heyting, expresia predicativă ar reprezenta o construcţie care presupune un obiect şi o propoziţie sau o proprietate (aceasta deoarece nu se poate face distincţia respectivă). Rootselaar însă

[107] *Cf.* A. Heyting, *Les fondements des mathématiques*, p. 21.
[108] *Cf.* A. Heyting, *Intuitionism. An introduction*, p. 103.

consideră că ceea ce se construieşte este tocmai obiectul matematic cu proprietatea respectivă [109]. Aceasta înseamnă însă că nu se mai poate vorbi în termenii logicii obişnuite, unde forma predicativă reprezintă componentele (subiectul şi predicatul) unei propoziţii. Într-adevăr, $P(\alpha_i)$, în care P prescurtează expresia ,,par'' corespunzătoare proprietăţii pe care o are construcţia matematică a cărei expresie, să zicem ,,4'' este desemnată de constanta individuală α_i, este diferită şi de alt tip decît simplul α (= constantă propoziţională), care prescurtează expresii ca ,,$2 + 2 = 4$'' corespunzătoare unor construcţii complexe de *operaţii* matematice şi nu de obiecte matematice cu proprietăţile lor.

Acestea sînt o parte dintre dificultăţile legate de semnificaţia intuiţionistă a formelor predicative, care de regulă sînt trecute cu vederea. Pentru a nu complica expunerea, reţinem interpretarea lui B. van Rootselaar, care corespunde în mai mare măsură relaţiei (6′), făcînd însă abstracţie de problema introducerii proprietăţilor prin compararea a două construcţii matematice.

j) *Problema cuantificării*

Spre deosebire de semnificaţia formelor predicative, care nu are o influenţă directă asupra *calculului* predicativ, interpretarea intuiţionistă a cuantorilor a trezit interesul general. Cuantorii formalişti, $(\forall x)$ = ,,oricare ar fi x'' şi $(\exists x)$,,există un x'' precizează formele predicative $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$, ... care conţin variabile individuale. În limbaj formalist, acestea sînt numite ,,funcţii propoziţionale''. Dacă este precizat ,,domeniul'' variabilei individuale, atunci prin cuantificare, fără altă specificare, se obţine o expresie, adevărată sau falsă; acelaşi lucru se obţine prin specificarea variabilei. $F(x)$, de exemplu, cu domeniul variabilei individuale ,,oameni'' şi proprietatea F = filozof, devine, prin specificarea lui x, adevărată în cazul cînd x este înlocuit cu ,,Socrate'' şi falsă cînd x este înlocuit cu ,,Pericle'', căci într-adevăr Socrate a fost filozof, pe cînd Pericle nu. Tot astfel prin cuantificare se obţine $(\forall x) F(x)$ şi $(\exists x) F(x)$. Dacă este vorba de acelaşi domeniu de indivizi şi aceeaşi proprietate, atunci $(\forall x) F(x)$ este falsă, căci nu orice om este filozof, în timp ce $(\exists x) F(x)$ este adevărată, căci există cel puţin un om care să fie filozof.

[109] B. van Rootselaar, *op. cit.*, p. 159.

Prima restricţie intuiţionistă se referă la domeniul variabilei individuale. Există *două* şi numai două domenii intuiţioniste admisibile: unul este domeniul construcţiilor matematice mentale redate prin α_i, β_i, $\gamma_i, \ldots$, adică domeniul construcţiilor simple exprimabile prin cifre şi domeniul construcţiilor complexe, a operaţiilor cu construcţii simple, redate prin α, β, $\gamma, \ldots$ Distincţia permite utilizarea acestor semne şi a variabilelor a_i, b_i, $c_i, \ldots$ şi respectiv a, b, $c, \ldots$, astfel încît orice formă predicativă intuiţionistă îşi are domeniul precizat prin însăşi construcţia ei.

Conform acestei restricţii se poate conchide că formele predicative obişnuite $F(x)$, $F(y)$, $F(z), \ldots$ *sînt mai generale* decît cele intuiţioniste, respectiv $P(a_i)$, $P(b_i)$, $P(c_i), \ldots$ sau $P(a)$, $P(b)$, $P(c), \ldots$ Altfel spus, formele predicative intuiţioniste *sînt particularizări* ale formelor predicative obişnuite. Acelaşi lucru este valabil şi cu privire la ,,proprietăţi''. Cele obişnuite F, G, $H, \ldots$ pot fi proprietăţi oarecare, pe cînd cele intuiţioniste P, Q, $R, \ldots$ sînt *numai* proprietăţi ale construcţiilor matematice mentale.

Heyting consideră că o formulă $(\exists\, x)\, A(x)$ nu poate avea alt înţeles decît : Poate fi construit un obiect matematic x, care satisface condiţia $A(x)$''.[110] Tot la Heyting găsim însă şi formularea ,,$(\exists\, x)\, A(x)$ nu semnifică altceva decît un obiect matematic b, astfel încît $A(b)$ a fost deja construit''[111].

Fiind vorba de ,,obiecte matematice'' nu are sens utilizarea lui x, care desemnează ,,obiecte în genere''. Formulele intuiţioniste existenţiale vor avea deci forma

$$(\exists\, a_i)\, P(a_i),\quad (\exists\, b_i)\, P(b_i), \ldots \quad \text{sau} \quad (\exists\, a)\, P(a), \quad (\exists\, b)\, P(b), \ldots$$

Dar ,,poate fi construit'' şi ,,a fost construit'' sînt condiţii diferite de simplul ,,există''. Ceea ce este comun în formulări ar fi doar ,,un'' : există *un*. . ., a fost construit *un*. . .

B. van Rootselaar simte nevoia să introducă un semn special în locul lui ,,$\exists$'' şi anume ,,U''. Formula existenţială apare la el în forma $(\mathrm{U}x)A(x)$. Şi P. Destouches-Février a simţit nevoia introducerii unui semn diferit de cel formalist şi anume ,,P''[112], astfel încît formula

[110] A. Heyting, *Some remarks on intuitionism*, în : ,,Constructivity in mathematics'', Amsterdam, 1959, p. 70.

[111] A. Heyting, *Remarques sur le constructivism*, p. 177 şi A. Heyting, *Intuitionism. An introduction*, p. 103.

[112] P. Destouches-Février, *Sur l'intuitionisme et la conception constructive*, p. 82.

devine $(Px)A(x)$. Prin $(Ux)A(x)$ B. van Rootselaar înţelege: „dispun de o demonstraţie, respectiv o construcţie, prin intermediul căreia pot construi un obiect cu proprietatea A"[113]. Se observă că în această formulare este vorba de *două* construcţii.

Conform primelor teze intuiţioniste este însă clar că nu poate să existe nimic înainte de a fi construit mental. Deci nu poate să existe nici proprietate înaintea construcţiei. Dacă reţinem doar pe „un" din accepţia obişnuită a lui „∃", atunci putem utiliza litera „E", de la „Ἕν" = un, cu accepţia „dispunem de un..." sau „a fost efectuat un..." Formula $(\mathsf{E}\, a_i)P(a_i)$ înseamnă atunci: „dispunem de o construcţie a_i care are proprietatea P" sau „a fost efectuată o construcţie a_i care are proprietatea P". Dacă P înseamnă „divizibil", atunci $(\mathsf{E}\, a_i)\, P(a_i)$ înseamnă „a fost construit un număr care este divizibil". Cu alte cuvinte, „E" semnifică „există efectiv" spre deosebire de „∃" care poate să semnifice şi o existenţă probabilă. Cuantificatorul existenţial intuiţionist este deci *o particularizare* a celui obişnuit.

În legătură cu cuantificarea generală, Heyting, consideră că $(\forall\, x)\, A(x)$ înseamnă „ori de cîte ori a fost construit un obiect matematic, el satisface $A(x)$" sau „dispunem de o metodă generală de construcţie astfel încît orice element a din domeniul Q acceptă prin specializare construcţia $A(a)$". Domeniul Q pune aici în evidenţă faptul că domeniul general al construcţiilor simple a_i, b_i, c_i,... poate fi împărţit în *subdomenii*, ca domeniul numerelor naturale, domeniul numerelor pare, al celor impare ş.a.m.d.

B. van Rootselaar şi P. Destouches-Février introduce semne speciale pentru cuantorul general. Pentru Rootselaar $(\cap\, x)\, A(x)$ semnifică „dispunem de o demonstraţie (construcţie) care pentru fiecare construcţie a unui x atrage după sine reprezentarea lui A". Février specifică faptul că în cazul în care domeniul lui x este infinit, acel *fiecare* sau *oricare ar fi* nu poate avea semnificaţie intuiţionistă, căci niciodată nu poate fi construită o colecţie infinită de obiecte.

Ca şi în cazul precedent, ceea ce rămîne din semnificaţia lui „∀" este *oricare*, pe care îl vom nota cu „Π" de la Πᾶν = oricare. Vor apărea astfel formule ca $(\Pi\, a_i)P(a_i)$, care înseamnă: „oricare dintre construcţiile realizate a_i ale unui domeniu Q are proprietatea P". Dacă P înseamnă „divizibil" iar Q = domeniul numerelor pare mai mare decît 2, atunci $(\Pi\, a_i)\, P(a_i)$ va însemna „oricare număr par construit deja mai mare decît doi este divizibil".

[113] B. van Rootselaar, *op. cit.*, p. 159.

Cuantificatorul general intuiţionist reprezintă deci o *particularizare* a celui obişnuit. Primul se referă la *oricare dintre* construcţiile matematice realizate deja, în timp ce ultimul se poate referi la *orice* construcţii sau obiecte existente, inexistente sau posibile.

În calitate de particularizări, formulele predicative intuiţioniste determină anumite particularităţi ale calculului predicativ intuiţionist. Unele dintre acestea sînt legate de *semnificaţia predicativă a negaţiei.*

De obicei nu se face nici o distincţie între negaţia utilizată în logica propoziţiilor şi *negaţiile* utilizate în logica predicatelor. Situaţia este aceeaşi şi în logica intuiţionistă a predicatelor. Aici apar formule ca $\neg$ (E a_i) $P(a_i)$ şi (E a_i) $\neg$ $P(a_i)$. Negaţia din $\neg$ (E a_i) $P(a_i)$ poate fi identificată cu negaţia unei variabile propoziţionale, respectiv $\neg$ a. În acest caz, ar însemna că ,,negăm faptul că a fost construit un a_i cu proprietatea P''. Negaţia din (E a_i) $\neg$ $P(a_i)$ este însă de alt gen. Expresia înseamnă că ,,a fost construit un a_i care nu are proprietatea P'', sau ,,a fost construit un a_i care are proprietatea $\neg$ P''. Cele două semnificaţii nu sînt echivalente. La intuiţionişti se vorbeşte însă despre ,,proprietăţi negative'' *(negative eigenschappen)* ceea ce ar însemna că trebuie menţinută *numai* a doua semnificaţie. Dar, în acest caz, este evident că o proprietate negativă nu poate fi identificată cu o expresie negată. Aici ar trebui introdus un semn special pentru negaţie. Lipsa acestui semn a dus la o dispută, în realitate neîntemeiată, între Brouwer şi adepţii logicii intuiţioniste fără negaţie.

Brouwer susţine că există proprietăţi negative [114], de unde conchide că ,,nu este posibilă eliminarea negaţiei din matematică'' [115]. Într-adevăr, el demonstrează că poate fi construit un număr real ρ, definit printr-o succesiune infinită de numere raţionale $a_1, a_2, a_3, \ldots$ astfel încît nu este posibil să se demonstreze nici $\rho > 0$ nici $\rho < 0$, în schimb ρ se dovedeşte a avea proprietatea negativă ,,non egal cu zero'' ($\neq 0$). Dacă notăm cu P proprietatea ,,egal cu zero'' ($= 0$) atunci obţinem pentru domeniul Q = numere reale (E a_i) $\neg$ $\neg$ $P(a_i)$. Griss [116] şi D. van Dantzig [117] atacă teza lui Brouwer utili-

[114] L. E. J. Brouwer, *Essentieel-negative eigenschappen*, Indagationes Mathematicae, X, p. 322.

[115] B. van Rootselaar, *Intuition und Konstruktion*, Studium Generale, 3, 1966, p. 181.

[116] G. F. C. Griss, *La mathematique intuitioniste sans negation*, Nieuw Archief voor Wiskunde, III, 1955, p. 137.

[117] D. van Dantzig, *Comments on Brouwer's theorem on essentially-negative predicates*, Indagationes Mathematicae, pp. 949—951.

zînd în cele din urmă argumente antiintuiţioniste, reproşînd, fără o serioasă justificare, faptul că Brouwer ar utiliza argumente „subiectiviste". D. van Dantzig atacă de exemplu termenul de „subiect creator", a cărui abandonare lasă deschisă interpretarea platonică a entităţilor matematice şi chiar termenul „absurd", echivalent cu „negaţie". Însă în mod normal admiterea unei logici fără negaţie nu trebuie să însemne infirmarea conceptului de negaţie în genere.

În realitate, dacă se introduce un semn special pentru proprietatea negativă sau negarea proprietăţii, să zicem semnul $\neg_p$, atunci este evident că admiterea expresiilor de tip $(\mathsf{E}\, a_i) \neg_p P(a_i)$ nu înseamnă şi admiterea expresiilor de tip $\neg\, (\mathsf{E}\, a_i)\, P(a_i)$.

Dacă se precizează ce înseamnă *asertarea* şi *atestarea* unei forme predicative, analogă celei propoziţionale, atunci este uşor de constatat că formele predicative care con-ţin semnul „$\neg$" nu pot fi asertate, dar pot fi în schimb atestate, tot aşa formulele care conţin semnul „$\neg_p$".

În cazul asertării se obţine o logică predicativă fără „$\neg$" şi „$\neg_p$". În cazul atestării se obţine fie o logică cu „$\neg$" şi „$\neg_p$", fie o logică cu „$\neg$", dar fără „$\neg_p$". Poate fi concepută, după cum s-a menţionat şi o logică cu „$\neg_p$" dar fără „$\neg$", aceasta nu rezultă însă din accepţiile asertării şi atestării. Într-adevăr, poate fi concepută o logică fără negaţie, respectiv fără „$\neg$", în care unele proprietăţi să fie definite ca negaţii ale altor proprietăţi sau ca proprietăţi negative, aşa cum apar, dealtfel, în limbajul uzual. Se înţelege că atît „par", cît şi „non-par" sînt proprietăţi pozitive. Cu toate acestea „non-par" poate fi considerat negaţia proprietăţii „par" sau o proprietate negativă. În această accepţie, dacă notăm cu P „par" şi cu Q „impar", atunci obţinem automat $\neg_p P = Q$ şi $\neg_p Q = P$. Acesta este cazul cel mai simplu în care se poate admite sau nu „$\neg_p$", fie într-o logică cu negaţie, fie într-una fără negaţie.

Există însă situaţii în care proprietăţii negative nu-i corespunde o singură proprietate pozitivă. De exemplu, lui „non egal cu zero", din situaţia descrisă de Brouwer, îi corespunde sau „mai mare decît zero" sau „mai mic decît zero". Dacă notăm cu P „egal cu zero", cu Q „mai mare decît zero" şi cu R „mai mic decît zero", obţinem $\neg_p P = Q \vee R$. Aceasta înseamnă că formula $(\mathsf{E}\, a_i) \neg_p P(a_i)$ poate fi înlocuită cu $(\mathsf{E}\, a_i)\, Q(a_i) \vee R(a_i)$ şi invers. Ceea ce vrea să demonstreze Brouwer este faptul că dacă domeniul variabilei a_i este acela al numerelor raţionale, iar proprietăţile corespunzătoare lui $\neg_p P$ sînt contradictorii, respectiv Q sau $\neg_p Q$ atunci echivalenţa

$$(25) \qquad (\mathsf{E}\, a_i) \neg_p P(a_i) = (\mathsf{E}\, a_i)\, Q(a_i) \vee \neg_p Q(a_i)$$

nu mai are loc, deoarece are loc

$$(26) \qquad (\mathrm{E}\ a_i)\ Q(a_i) \vee \neg_p\ Q(a_i) \supset (\mathrm{E}\ a_i)\ \neg_p\ P(a_i)$$

dar nu mai are loc

$$(27) \qquad (\mathrm{E}\ a_i)\ \neg_p\ P(a_i) \supset (\mathrm{E}\ a_i)\ Q(a_i) \vee \neg_p\ Q(a_i).$$

Din această cauză, se poate considera că demonstraţia lui Brouwer nu este suficientă pentru introducerea proprietăţilor negative ca „esenţiale", căci se dovedeşte într-adevăr că este necesar $\neg_p\ P$, dar numai cînd se admite deja, în prealabil, existenţa lui $\neg_p\ Q$. Or, existenţa lui $\neg_p\ Q$ are nevoie la rîndul ei de o altă demonstraţie.

Această demonstraţie reprezintă, pe de altă parte o încercare de a respinge *tertium non datur* la nivelul lui „$\neg_p$".

A. Reymond aplică şi la acest nivel (al formulelor predicative) restricţiile *valorice* impuse de respingerea legii terţului exclus [118]. El consideră că, în cazul în care constanta individuală α_i, presupune o infinitate de construcţii, nu se poate decide dacă $P(\alpha_i)$ este adevărată sau nu, respectiv dacă o construcţie ipotetică are sau nu o anumită proprietate. Nu se poate decide, consideră el, dacă construcţia exprimată prin „$2^x + 1$" are proprietatea „par".

Restricţiile valorice cad de la sine dacă se porneşte nu de la proprietăţi către construcţii, ci invers. Dacă x din „$2^x + 1$" poate să fie orice număr natural, este evident că lui „$2^x + 1$" îi corespund o infinitate de construcţii, care nu pot fi realizate efectiv.

Heyting observă, în legătură cu negaţia, faptul că $\neg\neg\ (\Pi\ a_i)\ P(a_i)$ nu este echivalent cu $(\Pi\ a_i)\ \neg_p \neg_p\ P(a_i)$, ceea ce înseamnă necesitatea diferenţierii celor două tipuri de semne. Este evident de asemenea că nu sînt echivalete nici $\neg\ (\mathrm{E}\ a_i)\ P(a_i)$ şi $(\mathrm{E}\ a_i)\ \neg_p\ P(a_i)$, căci are loc implicaţia

$$(28) \qquad (\mathrm{E}\ a_i)\ \neg_p\ P(a_i) \supset \neg\ (\mathrm{E}\ a_i)\ P(a_i)$$

— de exemplu, din faptul că „a fost contruit un număr care este non raţional" (cînd P înseamnă „raţional") urmează că „nu a fost construit un număr care este raţional" —, dar nu are loc implicaţia

$$(29) \qquad \neg\ (\mathrm{E}\ a_i)\ P(a_i) \supset (\mathrm{E}\ a_i)\ \neg_p\ P(a_i),$$

[118] A. Reymond, *La fonction propositionnelle en logique algoritmique et le principe du tiers exclu*, Verhandlung des Int. Math. Kongresses, Zürich, 1932, Bd. II, p. 347.

căci din faptul că „nu a fost construit un număr rațional” nu urmează că „a fost construit unul non rațional”. O situație analogă apare în cazul cuantificatorului general.

Din această cauză, Heyting încearcă să respingă *negatio duplex* fără să apeleze la „$\urcorner\!\cdot\!]_p$”. El consideră că $(\mathsf{E}\, a_i)\, P(a_i)$ are altă semnificație decît $\neg\, \neg\, (\mathsf{E}\, a_i)\, P(a_i)$. Într-adevăr, din „faptul că se neagă faptul că nu a fost realizată o construcție matematică cu proprietatea P” nu urmează că „a fost realizată efectiv o astfel de construcție”, deci formula

(30) $$\neg\, \neg\, (\mathsf{E}\, a_i)\, P(a_i) \supset (\mathsf{E}\, a_i)\, P(a_i)$$

nu poate să aibă loc.

Se constată de asemenea că nu mai sînt valabile unele formule intuiționiste corespunzătoare următoarelor echivalențe formaliste

(31) $$(\forall\, x)\, F(x) = \sim (\mathsf{E}\, x) \sim F(x)$$

(32) $$(\mathsf{E}\, x)\, F(x) = \sim (\forall\, x) \sim F(x).$$

Într-adevăr, intuiționistic nu poate să aibă loc

(33) $$(\Pi\, a_i)\, P(a_i) = \neg\, (\mathsf{E}\, a_i)\, \urcorner\!\cdot\!]_p\, P(a_i),$$

căci deși are loc

(34) $$(\Pi\, a_i) P(a_i) \supset \neg\, (\mathsf{E}\, a_i)\, \urcorner\!\cdot\!]_p\, P(a_i)$$

nu are loc inversa

(35) $$\neg\, (\mathsf{E}\, a_i)\, \urcorner\!\cdot\!]_p\, P(a_i) \supset (\Pi\, a_i)\, P(a_i).$$

Ultima formulă, înseamnă : din „negarea faptului că a fost contruit un număr cu proprietatea $\urcorner\!\cdot\!]_p\, P$” *nu urmează* că „orice număr construit are proprietatea P”. Tot astfel, nu poate să aibă loc formula

(36) $$(\mathsf{E}\, a_i)\, P(a_i) = \neg\, (\Pi\, a_i)\, \urcorner\!\cdot\!]_p\, P(a_i),$$

căci are loc formula

(37) $$(\mathsf{E}\, a_i)\, P(a_i) \supset \neg\, (\Pi\, a_i)\, \urcorner\!\cdot\!]_p\, P(a_i),$$

dar conversa ei nu poate fi admisă.

Aceste restricţii rezultă direct din admiterea conceptului de „existenţă efectivă". Fiecare membru al unei egalităţi, ca cele menţionate, trebuie să fie construit efectiv. Aceasta înseamnă că, în principiu, construcţia unui membru al egalităţii sau negarea lui nu înseamnă şi construcţia sau negarea celuilalt, decît în cazul în care cele două construcţii ar fi identice.

Acestea sînt o parte dintre problemele deosebite din logica intuiţionistă a predicatelor. Lor nu li se acordă, de regulă, prea mare importanţă, datorită elaborării sistemelor formale intuiţioniste. În cadrul acestora, formulele predicative se introduc pur şi simplu, în manieră formalistă, cum a procedat şi Heyting în Σ_{Hy} fără să mai fie pusă în discuţie semnificaţia lor intuiţionistă.

IV. TEORIA INTUIȚIONISTĂ A SISTEMELOR FORMALE

Teoria logică intuitivă a matematicii intuiționiste, prezentată în capitolul precedent, a fost construită pe baza tezelor intuiționiste (I — VI). O logică completă a matematicii intuiționiste trebuie să se bazeze însă și pe teza (VII). Conform acesteia, ar trebui construit un sistem axiomatic care să *descrie* în mod sistematic teoria intuitivă.

În „logica intuiționistă", după cum s-a remarcat deja, lucrurile nu s-au petrecut astfel. Sistemele axiomatice au precedat teoria intuitivă, care este încă în curs de elaborare. Mai mult, chiar au împiedicat elaborarea teoriei intuitive. Motivul principal rezidă în încălcarea tezei (VII). Într-adevăr, toate sistemele menționate au avut menirea de a *construi* „logica intuiționistă" și nu de a descrie în mod sistematic o teorie intuitivă preexistentă.

Conform tezei (VII) trebuie adăugat faptul că, intuiționistic vorbind, raportul dintre teoria intuitivă și sistemul formal nu este numai de succesiune în timp. Teoria intuitivă constituie garanția paralelismului matematico-lingvistic. Sistemul formal reprezintă, în acest sens, o *metateorie = o teorie sistematică a teoriei intuitive.* Însă teoria și metateoria, în sens formalist, nu sînt decît *parțial izomorfe.*

În teoriile intuitive obișnuite apar trei feluri de formule: consistente, inconsistente și valide sau tautologice. Scopul sistemelor axiomatice este acela de a oferi mijlocul prin care pot fi obținute tautologiile. Expresiile consistente sau inconsistente apar numai ca părți constitutive ale tautologiilor, ceea ce nu se întîmplă de regulă în teoria intuitivă.

În teoria intuitivă intuiționistă, ca logică a matematicii intuiționiste, apar *patru* tipuri de formule, dintre care numai cele consistente au corespondent propriu-zis în logica formalistă. Formulele asertate sau atestate, ca și cele atestate fără a fi asertate și cele negate, făcînd abstracție de semnificația lor specială, pot, după formă, adică identificînd variabilele și operatorii intuiționiști cu cei obișnuiți, să

apară în toate cele trei posturi formaliste. Aceasta ar însemna, intuiționistic vorbind, că tautologiile nu au un statut privilegiat. Într-adevăr, după cum s-a remarcat deja, multe formule corespunzătoare, după formă, tautologiilor nu au nici o semnificație în logica matematicii intuiționiste.

Aceasta înseamnă că, în logica matematică intuiționistă, teoria intuitivă și sistemul formal corespund într-o și mai mică măsură decît în logica formalistă. Pentru o astfel de teorie intuitivă ar fi necesară elaborarea unui sistem formal *de alt tip* decît cel formalist, al cărui obiectiv îl constituie tautologiile. Dar un astfel de sistem nu este cunoscut încă. Cele prezentate deja sînt sisteme care diferă de cele formaliste obișnuite numai prin faptul că respectă teza (VI).

Cu toate acestea, sistemele prezentate nu sînt identice. Fundamentarea teoriei intuitive pe teze intuiționiste oferă unicul criteriu admisibil de apreciere a *valorii intuiționiste* a acestor sisteme. Σ_k și Σ_{Gl}, de exemplu, în care se lucrează cu variabile și operatori obișnuiți, respectă numai teza (VI) și are deci o valoare intuiționistă minimă. Σ_{Go}, adoptat de Gonseth, Barzin, Errera ș.a. are aceleași deficiențe (variabile și operatori formaliști). În plus, introduc trivalența, care nu are corespondent în teoria intuitivă.

Numai Σ_{Hy} are legătură evidentă cu teoria intuitivă. Este vorba, în primul rînd, de variabilele propoziționale, care desemnează numai propoziții matematice și, în al doilea rînd, de operatorii care au semnificație intuiționistă. Dar, făcînd abstracție de aceste trăsături intuiționiste ale sistemului, cum se face de regulă, Σ_{Hy} nu diferă de celelalte sisteme formaliste decît, așa cum o spune Heyting însuși, ,,prin simpla bifare a unei axiome'' [119]. În rest, majoritatea tautologiilor formaliste constituie, ca într-un sistem obișnuit, obiectul investigației, ceea ce nu mai corespunde teoriei intuitive. Ce-i drept, Heyting recunoaște acest lucru, mai mult, chiar faptul că, ,,nici un sistem formal nu poate fi un sistem intuiționist'' [120].

În plus, lipsa prealabilă a unei teorii logice intuitive a făcut ca Σ_{Hy} să nu aibă nici măcar aplicațiile logice obișnuite ale unui sistem formalist. Pe de altă parte, în conformitate cu primele două teze intuiționiste, pe care nici un intuiționist autentic nu le încalcă, matematica intuiționistă s-a dezvoltat în continuare *independent*

[119] A. Heyting, *Les fondements des mathématiques du point de vue intuitioniste*, în : ,,Philosophie mathématique'', Paris, 1939, p. 74.

[120] A. Heyting, *Logique et intuitionisme*, în : ,,Applications scientifiques de la logique mathématique, Paris-Louvain, 1954, p. 74.

de Σ_{Hy}. Heyting însuşi, în lucrarea sa de amploare (*Intuitionism. An introduction*, 1966) prezintă matematica intuiţionistă independent de logică. Aceasta este plasată la sfîrşitul lucrării şi completată cu cîteva aplicaţii asupra unor construcţii matematice efectuate deja. Este de remarcat faptul că nici aceste aplicaţii nu au legătură cu Σ_{Hy}, ci cu teoria logică intuitivă, ceea ce dovedeşte că sistemul nu este operativ. Această situaţie a fost observată însă chiar de la început. Σ_{Hy}, odată construit, a fost considerat drept un simplu sistem formalist, căruia i s-au căutat diferite semnificaţii.

Interpretările, de regulă formaliste, ale sistemului Σ_{Hy}, nu sînt însă lipsite de interes, cu toate că nu mai au nici o legătură cu teoria logică intuitivă a matematicii intuiţioniste şi nici cu această matematică [121]. Ele au dus însă la rezultate formaliste remarcabile, iar în acest sens merită să fie amintite.

a) *Interpretări ale sistemului Heyting*

Interpreţii formalişti ai sistemului Σ_{Hy} au făcut abstracţie de semnificaţia intuiţionistă a variabilelor şi a operatorilor. Ei au obţinut astfel un calcul formalist special pe care l-au comparat apoi cu calculul formalist obişnuit, numit şi „clasic".

Deoarece Σ_K şi Σ_{Gl} sînt echivalente cu Σ_{Hy}, îi revine lui Kolmogorov meritul de a fi subliniat pentru prima dată că deosebirea dintre Σ_C (sistemul clasic) şi un sistem de tip Σ_{Hy} constă în aceea că Σ_C are o axiomă în plus sau Σ_{Hy} are una în minus.

A. Kolmogorov, renunţînd ulterior la propriul său sistem, incomplet dealtfel, interpretează sistemul Σ_{Hy} drept un „calcul al problemelor", mai precis, el consideră că poate fi construit un calcul al problemelor, care „coincide ca formă cu logica intuiţionistă a lui Brouwer, formalizată în ultimul timp de către domnul Heyting" [122]. Heyting consideră însă că această interpretare este „independentă de ipotezele intuiţioniste" [123], ceea ce nu-l împiedică totuşi să o adopte alături de propria lui interpretare, referitoare la construcţiile ipotetice.

[121] A. Heyting, *Les fondements des mathématiques*, p. 19.
[122] A. Kolmogorov, *Zur Deutung der intuitionistischen Logik*, Mathematische Zeitschrift, 35, 1932, p. 58.
[123] A. Heyting, *Les fondements des mathématiques*, p. 17.

Kolmogorov nu defineşte termenul „problemă". El dă însă cîteva exemple de probleme : (1) să se găsească patru numere întregi x, y, z, n, pentru care să fie satisfăcute relațiile $x^n + y^n = z^n$, unde $n > 2$; (2) să se demonstreze falsitatea tezei lui Fermat ; (3) să se construiască un cerc prin trei puncte date (x, y, z) ; (4) Presupunînd că este dată o rădăcină a ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, să se afle cealaltă rădăcină. (5) Presupunînd că numărul π este exprimat rațional prin funcția $\pi = n/m$ să se găsească o expresie analogă pentru numărul e. De aici urmează faptul că „problemele" sînt probleme matematice şi că nu orice problemă poate fi rezolvată.

Una dintre dificultățile acestei interpretări o constituie faptul că atît constantele α, β, γ,... (în notația noastră) cît şi operațiile cu constante devin probleme. Se poate vorbi astfel de problema α şi de problema $(\alpha \wedge \beta)$. Expresiile mai complicate devin „probleme de probleme ale problemelor de..." ceea ce este lipsit de sens. În plus, Kolmogorov este nevoit să utilizeze şi termenul de „soluție a unei probleme" pentru care nu introduce însă un simbol special.

În al doilea rînd, dacă constantele sînt probleme, variabilele vor fi variabile de probleme, iar operațiile cu variabile vor deveni generalizări ale operațiilor arbitrare cu probleme, ca : $(\alpha \wedge \beta) =$ „să se rezolve cele două probleme α şi β" devine $(a \wedge b) =$ „să se rezolve în genere două probleme diferite", ceea ce este lipsit de sens.

Intenția lui Kolmogorov se dovedeşte a fi aceea de a reintroduce *prin interpretare*, ceea ce Heyting a exclus prin *formalizare* şi anume expresiile nedecidabile, care la Kolmogorov devin „probleme nerezolvabile". Dar, în felul acesta, expresiile nedecidabile apar numai la nivelul constantelor propoziționale, iar $(a \vee \neg a)$ nu poate fi exclusă decît în mod arbitrar, axiomatic. În rest, Kolmogorov admite axiomele, teoremele şi, în genere, întregul sistem Σ_{Hy}.

P. Destouches-Février îşi propune să aprofundeze interpretarea lui Kolmogorov. Ea porneşte de la noțiunea generală de „teorie deductivă" [124], ale cărei reguli de raționament constituie o logică care ar conține un calcul propozițional caracterizat prin operațiile &, V, →, ∼ şi un calcul al problemelor caracterizat prin operațiile $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\neg$. A arăta că propoziția p este adevărată devine o problemă notată cu Pb(p). A rezolva problema Pb(p) înseamnă a stabili

[124] P. Destouches-Février, *Rapports entre le calcul des problèmes et le calcul de proposition*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. Paris, 220, 1945, p. 484.

adevărul lui p. În privința operațiilor se stabilesc definiții abreviative:

$$Pb(p) \wedge Pb(q) =_{Df} Pb(p \,\&\, q)$$

$$Pb(p) \vee Pb(q) =_{Df} Pb(p \bigvee q)$$

$$Pb(p) \supset Pb(q) =_{Df} Pb(p \rightarrow q)$$

La acestea se adaugă relația

$$\neg \dot{P}b(p) \supset Pb(p \rightarrow (q \,\&\, \sim q)),$$

care caracterizează negația. Pe baza acestor definiții se poate conchide că „Fiecărei formule admise în calculul problemelor îi corespunde o formulă de aceeași formă, identic adevărată, din calculul cu propoziții, prin înlocuirea semnelor respective, dar pot exista formule identic adevărate în calculul propozițional care nu au formule corespunzătoare în calculul problemelor" [125]. Această interpretare aduce noi perspective gnoseologice punctului de vedere expus de Kolmogorov, dar nu fără a extinde noțiunea de problemă, astfel încît (se observă din definiții) să se poată vorbi de probleme și în calculul propozițional obișnuit, ceea ce nu este cazul. Definițiile pun în evidență imprecizia, semnalată de Kolmogorov, în legătură cu distincția dintre „probleme" și „operații cu probleme" cărora li se adaugă aici „probleme ale operațiilor cu propoziții". Formalizat se obține $Pb(p)$= problemă; $Pb(p) \wedge Pb(q)$ = operație cu probleme; $Pb(q \,\&\, q)$ = problemă a unei operații cu propoziții. La acestea se poate adăuga, în sensul lui Kolmogorov, și $Pb(Pb(p) \wedge Pb(q))$. Toate acestea pot fi dublate de formule cu „rezolvări ale problemelor". În acest caz, apare inevitabil și „problema problemelor care nu pot fi rezolvate", ceea ce duce în cele din urmă la consecințe tot mai îndepărtate de sistemul Σ_{Hy}.

Încercînd o interpretare și mai cuprinzătoare, P. Destouches-Février raportează calculul problemelor și calculul propozițiilor la un al treilea calcul, pe care îl numește „calculul construcțiilor". Construcțiile, consideră ea, joacă un rol fundamental în matematici. O problemă este considerată a fi, aproape în sensul lui Heyting, „o

[125] *Ibidem*, p. 485.

construcție care urmează să fie realizată"[126]. O construcție realizată înseamnă o problemă rezolvată. Făcînd abstracție de noile complicații care se ivesc (dedublarea construcțiilor în intenționale și realizate, cît și a problemelor și apoi triplarea lor, respectiv : construcții imposibile, probleme nerezolvabile) se ajunge la concluzia că cele două calcule, al problemelor și al propozițiilor (în care apar totuși probleme, conform definițiilor amintite) sînt subordonate calculului construcțiilor. Ulterior, P. Destouches-Février revine asupra distincției dintre cele trei calcule. Important este faptul că stabilește de data aceasta că între calculul cu construcții și cel cu propoziții nu există izomorfism[127].

Kurt Gödel inițiază primele interpretări pur formaliste ale logicii intuiționiste și implicit ale sistemului Σ_{Hy}. El adaugă opiniei lui Glivenko, după care logica intuiționistă nu poate fi trivalentă[128], enunțul că „Nu există nici o realizare cu un număr finit de elemente (valori de adevăr), pentru care să fie satisfăcute formulele demonstrabile în Σ_{Hy} și numai acestea"[129] adică nu există o interpretare prin matrice *finite* de adevăr pentru expresiile calculului Σ_{Hy}. Problema este tratată pe larg de către A. Schmidt[130]. Pe baza acestui enunț, Gödel consideră că între Σ_{Hy} și Σ_C (sistemul clasic) ar exista un număr infinit de alte sisteme. Problema a fost reluată de S. Jaskovski, care ajunge la concluzia că Σ_{Hy} poate fi tratat pe baza unei matrici de adevăr cu $n = \aleph_0$ valori de adevăr[131].

Aceste interpretări formaliste, metalogice ale sistemului Σ_{Hy} nu contravin însă cu nimic teoriei intuitive a logicii intuiționiste. Din punct de vedere intuiționist, s-a dovedit posibilitatea elaborării unei teorii intuitive (varianta lui Brouwer), în care să nu se opereze cu valori de adevăr ; din punct de vedere formalist se demonstrează că una dintre sistematizările formale ale acestei logici, respectiv Σ_{Hy}, conține expresii care nu pot fi interpretate valoric.

[126] P. Destouches-Février, *Connexions entre les calculs des constructions, des problèmes, des propositions*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. Paris, 228, 1949, p. 31.

[127] P. Destouches-Février, *Sur l'intuitionnisme et la conception strictement constructive*, Indagationes mathematicae, XIII, 1951, p. 85.

[128] M. V. Glivenko, *Sur la logique de M. Brouwer*, p. 225.

[129] K. Gödel, *Zum intuitionistischen Aussagenkalkül*, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 4, 1933, p. 40.

[130] A. Schmidt, *Mathematische Gesetze der Logik*, Springer-Verlag, 1960, pp. 369—372.

[131] S. Jaskovski, *Recherches sur le système de la logique intuitioniste*, Actualités scient. et ind., 393, Paris, 1936.

Gödel încearcă și o transcriere a expresiilor intuiționiste în termenii uzuali din logica obișnuită a propozițiilor. Transcrierea este asemănătoare celei încercate (ulterior) de către Destouches-Février. Deosebirea constă în aceea că noul concept introdus „p este demonstrabil", notat Bp, care va deveni la Destouches, Février „p este o problemă", notat Pb(p), nu figurează în logica intuiționistă, ci este introdus numai în logica obișnuită, căreia i se adaugă următoarele axiome:

(A_1) $\quad Bp \rightarrow p$

(A_2) $\quad Bp \rightarrow B(p \rightarrow q) \rightarrow Bq$

(A_3) $\quad Bp \rightarrow BBp$

Gödel consideră că sistemul clasic care conține conceptul „p este demonstrabil", pe care îl notăm Σ_{Cb} poate fi dedus din Σ_{Hy} prin transcrierea conceptelor de bază[132]. Se obține următoarea corespondență:

$\neg p$	$\sim Bp$
$p \supset q$	$Bp \rightarrow Bq$
$p \vee q$	$Bp \vee Bq$
$p \wedge q$	$Bp \mathbin{\&} Bq$

Invers, trecerea de la Σ_{Cb} la Σ_{Hy} are loc numai în măsura în care Σ_{Cb} nu urmează transcrierea formulei ($p \vee \sim p$).

Contribuția lui Gödel este de mare importanță. Ea pune în evidență faptul că nu este suficientă excluderea arbitrară a legii terțului exclus pentru ca Σ_C să devină Σ_{Hv}, ci este necesară și o interpretare specială a variabilelor. Cea propusă de Gödel este însă destul de vagă. Expresia Bp sugerează excluderea din cadrul lui Σ_C a tuturor propozițiilor care nu pot fi demonstrate, sau negarea lor, respectiv $\sim$Bp. Aici nu se specifică dacă este vorba de propoziții matematice

[132] K. Gödel, *Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalkül*, Ergebnisse eines math. Koll., Heft 4, p. 39.

sau de propoziţii obişnuite. În plus, rămîne deschisă problema propoziţiilor care nu sînt nici Bp nici $\sim$ Bp. Pentru a evita aceste dificultăţi, Gödel consideră că Σ_{Cb} este echivalent cu sistemul implicaţiei stricte al lui Lewis, dacă Bp este transcris prin $\Box p$ (este necesar p) şi dacă la sistemul lui Lewis se adaugă postulatul lui Becker, respectiv ($\Box p \prec \Box \Box p$), unde „$\prec$" este semnul implicaţiei stricte.

1°. *Interpretări modale ale sistemului* Σ_{Hy}

O. Becker încercase şi el o astfel de interpretare [133], care diferă de transcrierea lui Gödel prin faptul că aici negaţia intuiţionistă este identificată cu negaţia posibilităţii, respectiv $\sim \Diamond$, ceea ce înseamnă că lui $\sim$ Bp (Gödel) nu-i corespunde $\sim \Box p$, ci $\sim \Diamond p$. De unde rezultă că demonstrabil ar însemna *posibil* nu *necesar*.

O interpretare intermediară apare la McKinsey şi A. Tarski [134]. Ei menţin Bp în accepţia lui Gödel, respectiv $\Box p$, dar interpretează negaţia intuiţionistă prin $\sim \Diamond$ în accepţia lui Becker, iar implicaţia intuiţionistă prin implicaţia strictă.

Interpretarea modală a logicii intuiţioniste, în special a calculului cu predicate, cunoaşte astăzi o dezvoltare surprinzătoare, în special, datorită contribuţiei lui S. Kripke. Acesta introduce noţiunea de „teorie a modelelor" prin „analiza semantică a logicii modale" [135]. Conceptul de „model" corespunde aici conceptului de „forcing" utilizat de P. Cohen în teoria mulţimilor [136]. Pe de altă parte, Kripke utilizează rezultatele obţinute de E. W. Beth prin interpretarea semantică a logicii intuiţioniste şi utilizează în acelaşi timp un sistem de tip modal ($S4$), apropiat de cel al lui Lewis. Toate acestea au dus la elaborarea unor sisteme formaliste care sînt cultivate în sine şi pentru sine şi care nu mai au practic nici o legătură cu logica matematicii intuiţioniste. M. C. Fitting, care tratează pe larg astfel de probleme, oferă, pe baza unei lucrări a lui K. Schütte [137], o transcriere

[133] *Cf.* O. Becker, *Zur Logik der Modalitäten*, Jahrbuch für Philosophische und Phenomenologische Forschung, 11, 1930.

[134] J. C. C. McKinsey and A. Tarski, *Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting*, Journal of simbolic logic, 13, 1948.

[135] *Cf.* S. Kripke, *Semantical analysis of modal logic* I, Zeitschrift für Math. Logik und Grundl. der Math., 9, 1963.

[136] P. Y. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis*, Proc. of the National Acad. of Sc., U.S.A., 50, 1963.

[137] K. Schütte, *Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik*, Springer-Verlag, 1968.

prin definiţii abreviate ale formulelor din Σ_{Hy} în Σ_{S4}. Redăm transcrierea, în notaţia noastră, astfel:

p	$\Box p$
$(p \vee q)$	$(p) \vee (q)$
$(p \wedge q)$	$(p) \wedge (q)$
$\sim p$	$\Box \sim p$
$p \supset q$	$\Box (p \supset q)$

Raportul dintre Σ_{Hy} şi Σ_{S4} poate fi rezumat astfel: „Dacă p este o formulă intuiţionistă, atunci p este validă în Σ_{Hy} dacă şi numai dacă mulţimea formulelor de tip p este validă în Σ_{S4} [138]. Se constată aici faptul că sînt utilizate, în ambele sisteme, aceleaşi semne pentru operatorii logici şi aceleaşi variabile. Deosebirea constă numai în adaosul modal sau jocul parantezelor. Aceasta înseamnă pierderea distincţiilor introduse de către Gödel. Într-adevăr, Gödel este consecvent în a reinterpreta variabilele intuiţioniste fie că sînt independente: p devine Bp, fie că sînt legate: $(p \wedge q)$ devine (Bp & Bq). Trebuie remarcat şi faptul că semnele pentru operatori, utilizate în logica intuiţionistă, sînt frecvent utilizate şi în logica formalistă, fără nici o interpretare specială.

Raportul dintre Σ_{Hy} şi Σ_{S4}, semnalat de Fitting pune în evidenţă unele probleme, urmărite în special prin interpretările modale, cum ar fi *problema completitudinii* şi *problema deciziei* în cadrul logicii intuiţioniste. K. Schütte enunţă următorul principiu: „Dacă o formulă a logicii propoziţiilor este valabilă în orice model finit al logicii intuiţioniste a propoziţiilor, atunci ea este deductibilă intuiţionistic" [139]. O formulă oarecare se numeşte *valabilă* într-un model, dacă modelul este *posibil* pentru formula respectivă. O formulă se numeşte *general-valabilă* dacă este valabilă în orice model posibil. O formulă se numeşte *realizabilă* într-un model, dacă modelul este posibil pentru acea formulă. Altfel spus „o formulă este *realizabilă*, dacă există un model, în care ea este realizabilă" [140]. Se ajunge astfel,

[138] M. C. Fitting, *Intuitionistic logic, model theory and forcing*, Amsterdam, 1969, p. 43.
[139] K. Schütte, *op. cit.*, p. 51.
[140] *Ibidem*, p. 53.

în funcție de generalitate, finitate, valabilitate și realizabilitate la următoarele tipuri de formule:

I. Formule general-valabile,
II a. Formule finit general-valabile,
II b. Formule general-realizabile,
III. Formule finit general-realizabile (general valabile în mod clasic),
IV. Formule realizabile finit (clasic realizabile),
V. Formule realizabile [141].

De exemplu formula $(p \vee \neg p)$ este *general realizabilă* (II b) dar nu este *finit general-valabilă* (II a). Formula $(\exists x) \neg\neg (Px) \to \neg\neg (\exists x)(Px)$ din logica predicatelor este *finit general-valabilă* (II a), însă nu este general-realizabilă (II b). Dacă notăm cu A ultima formulă, atunci formula $(A \vee \neg A)$ este *general-realizabilă* (II b) și *finit-valabilă* (II a), dar nu este *general-valabilă*. (I).

Făcînd abstracție de celelalte concepte, reținem că „o formulă este realizabilă, dacă există un model, în care ea este realizabilă". Se observă aici *deplasarea* problematicii intuiționiste din cadrul ei propriu în cadrul modelelor. În genere, toate interpretările modale ale logicii intuiționiste, prin modele sau *forcing* sînt de tip formalist. Ele pun în evidență imposibilitatea tratării ca atare a logicii intuiționiste numai cu mijloace clasic-formaliste. Pentru a-și putea realiza scopul (elaborarea de sisteme formaliste) formalistul este nevoit să traducă mereu în termeni formaliști expresiile intuiționiste. Dar, în acest fel, se ajunge la situația paradoxală în care o formulă intuiționistă este realizabilă, adică are în fond „dreptul la existență", dacă există un model în care să fie realizabilă. Or, din punct de vedere intuiționist este absurd să se vorbească de formule care ar preexista interpretării lor.

Se pornește deci de la expresii intuiționiste, cum ar fi $\neg a$, $(a \wedge b)$ ș.a.m.d.; se interpretează formalist variabilele și se obține $\neg p$, $(p \wedge q), \ldots$; se interpretează formalist operatori și se obține $\sim p$, $(p \,\&\, q), \ldots$ se reinterpretează variabilele în diferite variante modale și se obține $\sim \Box p$ sau $\sim \Diamond p$ sau $\Box \sim p$ pentru negație și $(\Box p \,\&\, \Box q)$ sau $(\Diamond p \,\&\, \Diamond q)$ sau $(p) \wedge (q)$ și în fine se ajunge la modele semantice ale modalității, după care se consideră că expresiile intuiționiste, respectiv existența și proprietățile lor ar fi în funcție de aceste modele. Aceasta înseamnă, cu alte cuvinte, că formalistul nu

[141] *Ibidem*, p. 58.

admite nici o expresie din logica intuiționistă pînă cînd nu-i găsește o interpretare formalistă.

Logica matematicii intuiționiste nu are nimic de cîștigat de pe urma acestor interpretări, care se dovedesc arbitrare (dovadă multiplele variante modale), în schimb are de cîștigat *logica modală formalistă*. Într-adevăr, încercările de a interpreta modal logica matematicii intuiționiste a dus la subtilizarea analizei formalist-semantice a modalității. Astfel a apărut conceptul de model pentru formule propoziționale și predicative. Un model pentru o formulă propozițională este definit prin : (1) o mulțime care nu trebuie să fie vidă, (2) o relație binară în cadrul acestei mulțimi și (3) o funcție care asociază fiecărei variabile propoziționale din formulă o valoare de adevăr [142]. Astfel se obțin modele de tip (M) în care relația binară este reflexivă și modele (S4) în care relația este reflexivă și tranzitivă. Pe baza acestora pot fi construite de exemplu *sistemele formaliste modale* alelogicii propozițiilor și *modele* ale sistemelor formaliste ale logicii propozițiilor.

Construcția sistemelor formaliste modale ridică însă o problemă care schimbă cu totul punctul de vedere discutat pînă acum. Reluînd etapele formaliste și considerînd, de data aceasta, logica intuiționistă ca sistem, obținem următorul proces : se pleacă de la Σ_{Hy} care este transcris într-un sistem modal (după Gödel ar fi sistemul Lewis + postulatul lui Becker, după Kripke și Fitting ar fi Σ_{S4} ; Kripke a încercat ulterior o intrepretare a logicii intuiționiste independentă de Σ_{S4} [143]) apoi se fac considerații *asupra* sistemelor modale, pentru care sînt construite, în cele din urmă, modelele.

Cu ocazia penultimului moment, respectiv analiza sistemelor modale, K. Schütte constată că acestea pot fi la rîndul lor *tratate* intuiționist, chiar à la Brouwer [144]. Prin urmare, se ajunge la concluzia că, de fapt, nu logica intuiționistă este interpretată prin logica formalistă modală, ci dimpotrivă logica formalistă modală este cea tratată în mod intuiționist, cu toate că punctul de plecare a fost în aparență, logica matematicii intuiționiste. Dacă nu se admite acest lucru, atunci se ajunge la un cerc vicios : logica matematicii intuiționiste este studiată cu mijloacele logicii formaliste modale, iar logica formalistă modală este studiată cu mijloace intuiționiste. Este însă evident că punctul de plecare nu l-a constituit *logica matematicii*

[142] *Cf. Ibidem*, p. 48 și p. 4.
[143] S. Kripke, *Semantical analysis of intuitionistic logic I*, in „Formal sistems and recursive functions", Amsterdam, 1965 p. 92.
[144] K. Schütte, *op. cit.*, p. 71.

intuiţioniste, căci aceasta poate fi studiată *în sine* şi nu necesită nici o altă interpretare în afară de cea pur intuiţionistă. Punctul de plecare l-au constituit *germenii formalismului neointuiţionist* care s-au manifestat, de la început, cu ocazia interpretării variabilelor şi operatorilor din Σ_{Hy}. Drumul a fost deschis de către Gödel, deşi interpretarea lui ar putea fi considerată drept „cea mai apropiată" de litera intuiţionistă.

K. Schütte alătură deci sistemelor modale *M* (al lui von Wright), *S*4 (Kripke) şi *S*5 (Lewis) sistemul *Br* (Brouwer)[145]. Σ_{Br} reprezintă, o *restricţie formalistă de tip intuiţionist* aplicată, alături de altele (restricţiile cerute de Σ_{S4} şi Σ_{S5}), sistemului general Σ_M. Restricţia presupune, de data aceasta, adăugarea unei *noi* axiome. Axiomele tistemului Σ_M sînt *toate formulele propoziţionale valabile* plus urmăsoarele axiome de modalitate.

(A_1) $\neg \Box A \vee A$

(A_2) $\neg \Box (\neg A \vee B) \vee \neg \Box A \vee \Box B$

Regulile fundamentale de deducţie sînt:

(R_1) $A, \neg A \vee B \Rightarrow B$ *(modus ponens)*

$A \Rightarrow \Box A$ *(modalizarea)*

Sistemele Σ_{S4}, Σ_{Br} şi Σ_{S5} au cîte o axiomă suplimentară, respectiv:

(A_3) $\neg \Box A \vee \Box \Box A$ (Σ_{S4})

(A_4) $A \vee \Box \neg \Box A$ (Σ_{Br})

(A_5) $\Box A \vee \Box \neg \Box A$ (Σ_{S5})

Literele *A* şi *B*, utilizate, simbolizează variabile de formule. Se observă imediat faptul că, în realitate *toate* sistemele modale prezentate sînt introduse prin restricţii formaliste de tip intuiţionist, respectiv prin axiome care reprezintă *restricţii modale privind aplicabilitatea legii terţului exclus*, ceea ce ilustrează perfect faptul că nu

[145] *Ibidem*, p. 71.

logica matematicii intuiţioniste este aici tratată cu mijloace metalogice modale formaliste, ci dimpotrivă, *logica intuiționistă se dovedește un instrument de investigație metalogică* a sistemelor modale formaliste.

2°. *Alte interpretări ale logicii intuiționiste*

Gödel a obţinut şi alte rezultate privind raportul dintre logica obişnuită şi cea intuiţionistă, cît şi dintre cele două tipuri de matematici [146]. Din punct de vedere logic, prezintă interes încercarea de a transcrie operaţiile clasice în operaţii intuiţioniste nu direct, prin intermediul operatorilor analogi, respectiv „$\rightarrow$" prin „$\supset$", „$\vee$" prin „$\vee$", „&" prin „$\wedge$" şi „$\sim$" prin „$\neg$", ci prin intermediul altor operaţii clasice echivalente, în afară de negaţie şi conjuncţie, care sînt transcrise direct. Se obţin astfel următoarele formule :

$\sim p$	$\neg p$
$p \rightarrow q$	$\neg (p \wedge \neg q)$
$p \vee q$	$\neg (\neg p \wedge \neg q)$
$p \,\&\, q$	$p \wedge q$

Se observă aici faptul că pe coloana intuiţionistă (dreapta) nu apare decît *conjuncţia* şi *negaţia*, în timp ce pe coloana formalistă apar *toţi* operatorii, mai precis toţi operatorii uzuali, căci formalistic sînt posibili 16 operatori. De aici urmează că *orice* formulă clasică poate fi transcrisă intuiţionistic. Dacă formula este adevărată în logica formalistă, atunci şi transcrierea ei este valabilă intuiţionistic. Aşa apare, de exemplu, *negatio duplex*

$$(\sim \sim p) \rightarrow p,$$

care în forma

$$\neg (\neg \neg p \wedge \neg p)$$

[146] *Cf.* K. Gödel, *Zur intuitionistischen Aritmetik und Zahlentheorie*, Ergebnisse eines math. Koll., Heft 4.

este valabilă şi în logica intuiţionistă, sau *tertium non datur.*

$$p \vee \sim p,$$

care transcris prin

$$\neg(\neg p \wedge \neg\neg p)$$

este valabil și intuiționistic.

Dar, în felul acesta se poate considera că logica intuiţionistă *conține* logica formalistă, deoarece orice formulă clasică poate fi redată intuiţionistic, în schimb logica intuiţionistă conține și alte formule în afara celor transcrise din logica formalistă, respectiv formulele care conțin operatorii „$\supset$" şi „$\vee$".

Rezultatul obținut de Gödel nu are însă decît o valoare pur formalistă. Într-adevăr, intuiţionistic nu este admisibilă transcrierea operațiilor logice una prin cealaltă. Aceasta înseamnă că între $p \vee \sim p$ şi $\neg(\neg p \wedge \neg\neg p)$ nu există nici o legătură. Din acest punct de vedere, nici formalistic nu se obține decît o simplă combinație de formule. Se ştie că prin negaţie şi operatorul numit „incompatibilitate" pot fi transcrise toate operațiile formaliste. Rezultatul lui Gödel reprezintă o astfel de transcriere în care apar însă numai patru operatori.

Deoarece variabilele sînt aceleași, aici este vorba, în realitate, de *aceiași* operatori ; dovada o constituie şi faptul că negația (cel mai discutat operator) și conjuncția sînt identice, doar semnele lor diferă. Făcînd abstracție de notație se obțin următoarele coloane :

$\sim p$	$\sim p$
$p \to q$	$\sim(p \,\&\, \sim q)$
$p \vee q$	$\sim(\sim p \,\&\, \sim q)$
$p \,\&\, q$	$p \,\&\, q$

Este uşor de observat că transcrierea aceasta nu are sens din punct de vedere intuiționist, căci de exemplu, echivalența

$$(p \to q) = \sim(p \,\&\, \sim q)$$

nu este valabilă intuiţionistic. Cu toate acestea, articolul lui Gödel a oferit formaliştilor o nouă problemă, respectiv aceea de a hotărî *care dintre cele două logici* (intuiţionistă sau formalistă) *o conţine pe cealaltă*. Posibilitatea apariţiei unei astfel de probleme este garantată de interpretarea pur formalistă a logicii intuiţioniste.

Cum era şi firesc, au apărut soluţii contradictorii, uneori la acelaşi autor. Lukasiewicz, de exemplu, abordînd problema din perspectiva *restricţiilor* axiomatice, consideră calculul intuiţionist al propoziţiilor drept o parte a calculului clasic, dar abordînd problema din perspectiva transcrierii a la Gödel, ajunge la concluzia contrară[147]. Se pare că primul punct de vedere, abandonat de către Lukasiewicz, este susţinut încă de reprezentanţi ai Şcolii poloneze, cum ar fi A. Mostowski, care, considerînd că toate formulele acceptate intuiţionistic sînt acceptate şi formalistic (clasic), conchide că „logica intuiţionistă este o parte a logicii clasice" [148]. Aceeaşi poziţie este adoptată de către J. Porte [149]. El consideră că Σ_C este sistemul clasic al lui A. Church. Un fragment din Σ_C este un sistem formal al cărui alfabet şi formule sînt aceleaşi cu alfabetul şi formulele din Σ_C, şi ale cărui teze sînt o parte din tezele lui Σ_C. Este clar, conchide Porte, că sistemul Σ_{Hy} este un fragment din Σ_C. Van Dantzig, pe de altă parte, consideră că „operaţiile logice elementare formează o parte a logicii intuiţioniste" [150]. El se bazează pe transcrierea operaţiilor à la Gödel şi ajunge la concluzia că ar exista o interpretare „slăbită" *(weaker)* şi una „tare" *(strong)* a operaţiilor logice. Deci $p \vee q$ şi $\neg(p \wedge \neg q)$ ar reprezenta aceeaşi operaţie, una fiind accepţia tare, cealaltă accepţia slăbită a disjuncţiei, ceea ce nu are nici un sens din punct de vedere intuiţionist.

Lukasiewicz, pornind de la teza lui Gödel, sugerează faptul că un sistem pur formalist, ca cel al lui Sobocinski (1939), care să conţină doar conjuncţia şi negaţia, ar fi un sistem intuiţionist [151]. Într-adevăr, dacă variabilele sînt identice şi operatorii de asemenea

[147] *Cf.* J. Lukasiewicz, *On the intuitionistic theory of deduction*, Indagationes Mathematicae, XIV, 1952, p. 208.

[148] A. Mostowski, *Formalization of the intuitionistic logic*, Acta Philosophica Fennica, XVII, 1965, p. 11.

[149] J. Porte, *Une proprieté du calcul propositionnel intuitionniste*, Indagationes Mathematicae, XX, 1958, p. 362.

[150] D. van Dantzig, *On the principles of intuitionistic and afirmative mathematics*, I, Indagationes Mathematicae, IX, 1947, p. 924.

[151] J. Lukasiewicz, *op. cit.*, p. 201.

(ceea ce este imposibil din punct de vedere intuiționist) atunci un sistem formalist, care conține doar conjuncția și negația, este o parte a sistemului Σ_{Hy}.

Pentru a dovedi acest lucru, Lukasiewiez elaborează un sistem intuiționist echivalent cu Σ_{Hy}, care poate fi notat cu Σ_{Li}, și unul parțial-intuiționist Σ_{Lp} care să conțină numai conjuncția și negația. Lukasiewicz mai elaborează un sistem Σ_{Lc} care să conțină numai implicația și negația. Pe baza transcrierilor à la Gödel, el stabilește o definiție, care în notația noastră ia forma:

$$\neg(p \wedge \neg q) \Rightarrow_{Df} (p \rightarrow q),$$

ceea ce înseamnă, după Lukasiewicz, posibilitatea de a înlocui orice expresii de forma $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ prin expresii de forma $p \rightarrow q$, deci de a introduce implicația clasică în calculul intuiționist. Σ_{Lc} este deci o parte a lui Σ_{Lp}, căci Σ_{Lp} conține și formule care nu pot fi transcrise prin implicația clasică. Pe de altă parte, Σ_{Lc} este identificat cu „teoria clasică a deducției"[152]. Lukasiewicz precizează prin urmare, cu mijloace axiomatice, rezultatul lui Gödel. Astfel: logica formalistă (clasică) respectiv Σ_{Lc} (redată prin negație și implicație) este o parte a unei părți Σ_{Lp} (negație și conjuncție) a logicii intuiționiste, respectiv a sistemului Σ_{Hy}.

Una din consecințele cu caracterul cel mai evident neintuiționist, care decurge din includerea logicii clasice în logica intuiționistă, o constituie faptul că, în cele din urmă, trebuie admis că, într-o formă sau alta „legea terțului exclus poate fi demonstrată în teoria intuiționistă a deducției[153]. Într-adevăr, legea terțului exclus este o formulă din sistemul Σ_{Lc}, în care disjuncția este transcrisă prin implicație conform relației $(\sim p \vee p) = (p \rightarrow p)$. Or, Σ_{Lc} este o parte din Σ_{Lp}, iar Σ_{Lp} o parte din Σ_{Hy}, *ergo* legea terțului exclus face parte din Σ_{Hy}. Se ajunge deci la următoarea contradicție: logica intuiționistă include și exclude în același timp legea terțului exclus. Contradicția dovedește că încercările de acest tip nu sînt valabile decît în momentul în care se renunță la însăși fundamentul logic al teoriei intuiționiste.

Pe baza definiției

$$(\sim p \rightarrow q) \Rightarrow_{Df} (p \vee q),$$

[152] *Ibidem*, p. 205.
[153] *Ibidem*, p. 207.

prin care se poate reda și terțul exclus, și pe baza definiției

$$\sim (p \rightarrow \sim q) \Rightarrow_{Df} (p \wedge q),$$

Lukasiewicz consideră că sistemul Σ_{Lc} poate fi „îmbogățit" prin introducerea conjuncției și a disjuncției. În felul acesta se obține un sistem mai bogat (Σ_{Lc2}) decît Σ_{Lc} — bogat înseamnă aici „cu mai multe operații logice". Dar sistemul Σ_{Lc2} este mai bogat și decît Σ_{Lp}, care îl conține pe Σ_{Lc}, și devine tot atît de bogat ca Σ_{Hy}. În felul acestea se ajunge la punctul de plecare, căci Σ_{Lc2} este Σ_C (sistemul clasic) cu legea terțului exclus și a dublei negații, iar Σ_{Hy} este sistemul intuiționist *fără* aceste legi, ceea ce înseamnă că dimpotrivă Σ_{Hy} este conținut în Σ_C, deoarece Σ_C conține și formule care nu apar în Σ_{Hy}. Cu alte cuvinte, din întreg este obținută partea, iar din parte întregul, de unde „partea conține întregul" și „întregul conține partea", devin identice.

Tot acest eșafodaj formalist cade de la sine dacă este interzisă, în mod intuiționist, transcrierea operațiilor logice unele prin altele. Nu este admisibil ca $p \vee \sim p$ să nu facă parte din Σ_{Hy}, dar să facă parte dintr-o parte a acestuia, care se dovedește astfel mai bogată decît Σ_{Hy}. Este evident că există formule din Σ_C care nu pot fi incluse în Σ_{Hy}. K. J. Cohen arată că există și formule din Σ_{Hy} care nu pot fi incluse în Σ_C prin simplă transcriere de operator [154]. El se referă la concluzia lui Lukasiewicz, după care, în cele din urmă, s-ar putea stabili relații între operatorii intuiționiști și cei clasici astfel încît ar avea loc relațiile

$$(p \supset q) \Rightarrow_{Df} (p \rightarrow q)$$

$$(p \wedge \dot{q}) \Rightarrow_{Df} (p \,\&\, q)$$

$$(p \vee q) \Rightarrow_{Df} (p \dot{\vee} q),$$

dar ar fi imposibile conversele lor. Textul lui Lukasiewicz nu este destul de explicit. Ultimele relații conțin semnul „$\Rightarrow_{Df}$" introdus de către Lukasiewicz fie prin „Fδ" fie simplu prin „F" care este apoi identificat cu „$\supset$", ceea ce ar duce la formule ca

$$(p \supset q) \supset (p \rightarrow q).$$

[154] K. J. Cohen, *A remark on Lukasiewicz's „On the intuitionistic theory of deduction"*, Indagationes Mathematicae, XV, 1953, p. 112.

Semnul „$\Rightarrow_{Df}$" are o justificare metalogică; identificat cu implicația intuiționistă dă naștere deci la *formule combinate* cu operatori intuiționiști și formaliști. Aceste formule combinate sînt considerate teze intuiționiste. Cohen demonstrează că una din aceste teze, respectiv

(22) $$(q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)),$$

dacă este transcrisă parțial prin „$\rightarrow$" duce la

(23) $$(q \rightarrow r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)),$$

care se dovedește o prescurtare a formulei

(24) $$\neg(q \wedge \neg r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)),$$

în virtutea definiției

$$\neg (p \wedge \neg q) \Rightarrow_{Df} (p \rightarrow q).$$

Se dovedește, pe baza unor matrici, că teza (22) obține aceleași valori ca și axiomele intuiționiste, în timp ce (24) nu obține aceste valori și deci nu este acceptabilă intuiționistic.

Valoarea acestei demonstrații depinde însă de convenții greu de acceptat atît din punct de vedere intuiționist, cît și formalist. Ea dovedește însă faptul că jocul transcrierilor, perfect valabil în logica formalistă, duce la complicații dacă este aplicat fără discernămînt și la logica intuiționistă.

b) *Sisteme intuiționiste diferite de* Σ_{Hy}

Sistemul lui Heyting rămîne sistemul „cel mai potrivit" pentru logica intuiționistă. Numeroasele completări și interpretările ulterioare pe care Școala intuiționistă și Heyting însuși le-au adăugat sistemului, de-a lungul a peste 40 de ani au dovedit faptul evident, de la care a pornit dealtfel autorul sistemului Σ_{Hy} în 1930, că nici un sistem formal nu poate să reprezinte în mod adecvat matematica intuiționistă. Aceasta nu a însemnat că, în acest timp, în afară de perfecționările referitoare la Σ_{Hy}, nu au fost posibile și alte încercări de a obține

un aşa-zis sistem „adecvat". Unele dintre aceste sisteme au fost construite cu scopul de a perfecţiona aparatul axiomatic, altele presupun o reinterpretare a formelor elementare.

Au fost amintite deja încercările, unele chiar anterioare sistemului Σ_{Hy}, de a interpreta logica intuiţionistă în calcule polivalente. Aceste încercări nu au dus la rezultate sistematice, iar faptul că au fost treptat abandonate dovedeşte că nu merită să fie perfecţionate. Ele, dealtfel, nu pot aduce nimic în plus faţă de calculele polivalente formaliste.

1° *Sistemul lui Johansson*

Ingebrigt Johansson, pornind de la două dintre axiomele sistemului Σ_{Hy}, şi anume

$$(A_{2.14}) \qquad \vdash \vdash b \supset (a \supset b)$$

$$(A_{4.1}) \qquad \vdash \vdash a \supset (a \supset b),$$

consideră că scopul lor este acela de a preciza semnificaţia implicaţiei [155].

Johansson consideră că implicaţia $(a \supset b)$ ar putea să aibă trei accepţii: (1) cînd b este recunoscut ca urmare sau consecinţă a lui a; (2) cînd b este considerat corect şi (3) cînd a este considerat fals sau absurd. Cazul (3) este redat în $(A_{4.1})$.

Glivenko demonstrase deja că ambele axiome sînt deductibile din formula

$$(38) \qquad (\neg a \vee b) \supset (a \supset b),$$

care este respinsă de către C. I. Lewis în „calculul implicaţiei stricte". Lewis admite însă conversa lui (38) şi anume

$$(39) \qquad (a \supset b) \supset (\neg a \vee b).$$

În logica obişnuită (formalistă) sînt valabile şi (38) şi (39); în Σ_{Hy} este valabilă (38), dar nu este valabilă (39); în logica lui Lewis este

[155] I. Johansson, *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*, Compositio Mathematica, 4, 1936, p. [1].

valabilă (39), dar nu este valabilă (38), iar în ceea ce Johansson numește „calculul minimal” nu este valabilă nici (38) nici (39).

Cu toate acestea sistemul lui Johansson (Σ_J) este mai apropiat de Σ_{Hy} decît de celelalte, căci respingînd pe (38) din care urmează atît ($A_{2.14}$) cît și ($A_{4.1}$), el menține totuși axioma ($A_{2.14}$) cît și celelalte axiome ale lui Σ_{Hy}, afară de ($A_{4.1}$).

Negația ($\neg a$) este considerată identică cu ($a \supset F$), conform definiției

$$a =_{Df} a \supset \mathbf{F},$$

în care F înseamnă „contradicție” sau „ceva fals”.

În privința teoremelor demonstrate, în Σ_J, spre deosebire de Σ_{Hy}, nu mai sînt valabile următoarele formule:

(4.4) $$a \wedge \neg a \supset b,$$

(4.41) $$(a \wedge \neg a) \vee b \supset b,$$

(4.42) $$(a \vee b) \wedge \neg a \supset b,$$

(4.45) $$b \dot{\vee} \neg b \supset (\neg \neg b \supset b),$$

(4.46) $$\neg a \vee b \supset (a \supset b),$$

(4.47) $$a \vee b \supset (\neg a \supset b),$$

(4.71) $$(a \supset b \vee \neg c) \supset (a \wedge c \supset b),$$

(4.81) $$\neg \neg (\neg \neg a \supset a).$$

Toate aceste formule sînt obținute direct sau indirect din ($A_{4.1}$). În rest, Σ_J diferă de Σ_{Hy} prin numărul formelor și metoda deducției.

Pentru a demonstra că formele enumerate nu sînt valabile în Σ_J, Johansson utilizează metoda matricială a lui Bernays, pe care o aplicase și Heyting. În cazul lui Σ_J, aplicarea acestei metode face ca formulele $a \vee \neg a$ și $\neg \neg a \supset a$ să nu mai fie echivalente. Cu alte cuvinte, dacă la axiomele lui Σ_{Hy} se adaugă una dintre aceste formule, atunci poate fi dedusă și cealaltă. Pentru Σ_J este valabilă regula după care dacă se adaugă drept axiomă $\neg \neg a \supset a$, atunci

pot fi deduse $a \vee \neg a$ şi $a \vee \neg a \supset b$, dar numai din $a \vee \neg a$, fără să fie utilizată şi $(a \wedge \neg a) \supset b$ nu poate fi dedusă $\neg\neg a \supset a$[156].

În ce priveşte raportul lui Σ_J cu logica lui Lewis, Johansson menţionează faptul că dacă la Σ_J se adaugă *tertium non datur* ca axiomă, atunci nu mai poate fi demonstrat (4.46), ci conversa ei, respectiv formula (39) pe care o admite Lewis.

O altă particularitate importantă a lui Σ_J o constituie faptul că aici nu mai sînt valabile principiile lui Glivenko[157]. De exemplu, nu mai este valabilă teza că „dacă o anumită expresie din logica propoziţiilor este demonstrabilă în sistemul clasic (Σ_C), atunci falsitatea falsităţii acestei expresii este demonstrată în Σ_J". Aceasta, deoarece $\sim \sim p \rightarrow p$ este demonstrabilă în Σ_C, în timp ce $\neg\neg(\neg\neg a \supset a)$, respectiv (4.81) nu mai este demonstrabilă în Σ_J.

Trebuie subliniat faptul că Johansson nu se referă la interpretarea variabilelor a, b, c,... Ca o consecinţă directă a acestui fapt, formulele predicative din Σ_J sînt identice cu cele formaliste. Restricţiile predicative decurg, la Johansson, numai din cele propoziţionale, axiomatice. Doar aplicarea formulelor predicative la domeniul geometriei presupune determinarea proprietăţilor. Însă interpretarea pe care le-o dă Johansson este greu de admis. $P(x)$, de exemplu, înseamnă la el „x este un punct", $G(x)$ înseamnă „x este o dreaptă ş.a.m.d.[158]. Aici formele predicative trebuie să fie interpretate enunţiativ, căci altfel „punct", „dreaptă" etc. nu pot fi admise în calitate de proprietăţi.

Sistemul Σ_J este admisibil din punct de vedere intuiţionist numai ca *variantă* a lui Σ_{Hy}, însă fără calculul predicativ. Independent de Σ_{Hy} sistemul Σ_J este un simplu sistem formalist arbitrar. Într-adevăr, respingerea axiomei ($A_{4.1}$) nu este o cerinţă impusă de necesităţile matematicii intuiţioniste. Sistemul Σ_J nu poate fi numit deci un „sistem logic al matematicii intuiţioniste".

2° *Logici fără negaţie*

Admiterea logicilor fără negaţie a întîmpinat multă rezistenţă, mai ales la început, cînd iniţiatorul cercetărilor în această direcţie, G. F. C. Griss, a căutat să le dea o justificare pur intuiţionistă. B. van Rootselaar aminteşte, în glumă, greutăţile pe care le-a avut de întîm-

[156] *Ibidem*, p. [10].
[157] *Ibidem*, p. [11].
[158] *Ibidem*, p. [13].

pinat căpitanul Guliver în ţara Houyhnhnmilor, un fel de cai foarte inteligenţi, a căror limbă, în treacăt fie spus, aducea foarte mult, zice Swift, cu olandeza! Guliver nu a reuşit să le explice Houyhnhnmilor ce este *minciuna*, deoarece aceştia foloseau cuvintele numai pentru a exprima *ceea ce este*. Dacă *ceea ce este* este redus la construcţiile matematice mentale, iar limbajul la limbajul matematic se ajunge la o concepţie pe care Rootselaar o numeşte „strict intuiţionistă",[159] în care, într-adevăr nu are sens să se vorbească despre *ceea ce nu este*.

În cadrul teoriei intuitive a fost stabilit deja faptul că o logică intuiţionistă *fără negaţie* este o *logică în care sînt admise numai expresiile asertate*, în timp ce o logică intuiţionistă cu negaţie este aceea în care sînt admise şi expresiile *atestate*. Sistemul formal al lui Griss nu este un sistem corespunzător întregii teorii logice intuitive a matematicii intuiţioniste. El corespunde doar teoriei intuitive în care nu apare negaţia. Această teorie a fost considerată limitată, dar totuşi valabilă în contextul logicii respective. Din această cauză, calităţile intuiţioniste ale sistemului prezentat de Griss trebuie apreciate, în primul rînd, în funcţie de propria lui teorie intuitivă fără negaţie.

Logica fără negaţie a lui Griss

Consecvent punctului său de vedere, după care intuiţionismul este o consecinţă a filozofiei idealiste, Griss consideră că „din motive filozofice utilizarea negaţiei poate fi respinsă în matematica intuiţionistă"[160]. El nu se limitează însă la această teză abstractă, şi, în conformitate cu teza (VII), încearcă nu numai elaborarea unei teorii logice intuitive *înaintea* sistemului formal, ci chiar elaborarea unei *matematici intuiţioniste fără negaţie*. Teoria sa intuitivă corespunde acestei matematici, în care absenţa negaţiei elimină automat raţionamentele şi principiile contestate intuiţionistic. Trebuie remarcat totuşi faptul că Griss nu acordă o importanţă deosebită teoriei intuitive şi că adesea raportează sistemul formal direct la matematica intuiţionistă fără negaţie. Însă sistemul formal nu este un sistem al matematicii intuiţioniste, ci al teoriei logice intuitive a acestei matematici, căci pe aceasta o descrie şi o sistematizează.

[159] B. van Rootselaar, *Intuition und Konstruction*, p. 181.
[160] F. C. Griss, *Negationless intuitionistic mathematics*, I, Proceedings koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 49, 1946, p. 1127.

Eliminarea negației, cum s-a văzut în teoria intuitivă, complică însă interpretarea operațiilor logice. În legătură cu disjuncția, de exemplu, enunțul „propoziția *a* este valabilă sau propoziția *b* este valabilă" nu are nici un sens în matematica fără negație, căci ea nu conține decît propoziții valabile. Din această cauză disjuncția, în logica fără negație este identică cu conjuncția. Într-adevăr, dacă *a* și *b* sînt întotdeauna adevărate, atunci $(a \wedge b)$ și $(a \vee b)$ sînt întotdeauna adevărate. Disjuncția în acest caz, devine *a fortiori* o disjuncție în care nu se poate ca unul din membrii să fie fals, adică devine o conjuncție. Griss ajunge la concluzia că în calculul propozițional al logicii fără negație nu poate să apară decît *implicația* și *conjuncția* [161].

Griss ține să atragă atenția că simpla construcție a unei logici în care să apară numai implicația și conjuncția nu înseamnă construcția unei logici *a matematicii fără negație*. O astfel de logică nu poate fi construită fără studiul matematicii fără negație [162], ceea ce corespunde tezei (VII).

În ce privește valoarea variabilelor propoziționale obișnuite Griss remarcă faptul că, în Σ_C, ele pot fi adevărate sau false, în Σ_{Hy} „nu este sigur dacă *p* este adevărată sau falsă", iar în matematica intuiționistă nu este posibil să apară propoziții false. Ultima remarcă permite în principiu identificarea logicii fără negație a lui Griss cu logica monovalentă a lui O. Onicescu.

Dar deși avertizează împotriva interpretărilor formaliste, Griss utilizează totuși ca semne pentru variabilele propoziționale $p, q, r, \ldots$, care pot da naștere la înțelegeri greșite. În realitate ele desemnează numai propoziții matematice. În plus, Griss admite fără justificări matematice prealabile axiomele lui Heyting în care apare conjuncția și implicația, cu excepția lui $(A_{2.4})$, respectiv $\vdash \vdash b \supset (a \supset b)$, și $(A_{2.5})$, respectiv $\vdash \vdash (a \wedge (a \supset b)) \supset b$.

Sistemul lui Griss (Σ_{Gr}) conține axiomele: [163]

$(A_{2.1})$ $\quad p \rightarrow (p \,\&\, p)$

$(A_{2.11})$ $\quad (p \,\&\, q) \rightarrow (q \,\&\, p)$,

$(A_{2.12})$ $\quad (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \,\&\, r) \rightarrow (q \,\&\, r))$,

$(A_{2.13})$ $\quad ((p \rightarrow q) \,\&\, (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$,

$(A_{2.1})^*$ $\quad (p \,\&\, q) \rightarrow p$.

[161] *Ibidem*, p. 947.

[162] F. C. Griss, *Logic of negationless intuitionistic mathematics*, Indagationes Mathematicae, XIII, 1951, p. 41.

[163] *Ibidem*, p. 42.

Axioma $(A_{2.16})^*$ înlocuiește pe $(A_{2.16})$, respectiv $\vdash \vdash q \to (p \to q)$.

Griss nu insistă asupra semnificației intuiționiste a operațiilor logice. Aceasta este o lipsă care se datorește tratării superficiale a teoriei intuitive. Cu toate acestea, lipsa disjuncției și a negației face imposibilă identificarea implicației din Σ_{Gr} cu implicația materială.

Griss utilizează următoarele reguli de operație :

(1.11) Din demonstrarea lui P și a lui Q urmează $P \& Q$.

(1.12) Din demonstrarea lui P și a lui $P \to Q$ urmează Q.

(1.13) Din demonstrarea lui R și $P \to Q$ urmează $P \to Q \& R$, unde P, Q și R sînt variabile de formule.

Din punct de vedere pur formal trebuie remarcat aici faptul că ,,logica matematicii fără negație'' nu este doar o ,,logică fără negație''. O simplă logică fără negație ar fi fost un sistem Σ_{fn} în care ar fi căzut cele *două* axiome din Σ_{Hy} care conțin negația. Sau, deoarece Σ_J exclude una din aceste axiome, ar fi fost un sistem Σ_J fără axioma care conține negația.

Alte sisteme fără negație

Acceptînd o teorie strict constructivă P. Destouches-Février ajunge la concluzia că ,,negația nu are ce căuta în matematici''. În mod firesc își pune apoi problema unei logici care să corespundă acestor matematici. Ea concepe mai întîi o *logică a construcțiilor* care duce la un ,,calcul izomorf cu calculul minimal al lui Johansson fără negație'' [164]. Este vorba de un sistem Σ_{fn} de tip pur formalist, care nu are nici o legătură cu matematica intuiționistă. De natură intuiționistă este însă așa-numita *logică a complementarității* fără negație [165], în care intervin noțiunile de ,,composabilitate'' și ,,incomposabilitate''. Ele sînt legate de relațiile numite ,,incompatibile'', care apar în matematica fără negație a lui Griss, de exemplu, relația R, care înseamnă ,,='' (același), și $\bar{R}$, care înseamnă ,,#'' (distinct). ,,Două propoziții $R(x, y, \ldots)$ și $\bar{R}(x, y, \ldots)$ cu aceleași argumente sînt numite incomposabile dacă R și $\bar{R}$ sînt incompatibile''; ele sînt composabile dacă relațiile sînt compatibile. Aici sînt căutate anumite relații, care, deși nu duc la expresii dintre care una să fie negația celeilalte, se comportă în mod analog. Introducerea unor

[164] P. Destouches-Février, *Le calcul de construction*, p. 1193.

[165] *Cf.* P. Destouches-Février, *Logique de l'intuitionisme sans négation et logique de l'intuitionisme positiv*, Comptes rendus de l'Acad. sc., Paris, 226, 1948, p. 38.

astfel de relații pare necesară pentru a ilustra *legea non contradicției*, care nu presupune valori de adevăr ca legea terțului exclus și, prin urmare, nici negația valorică. Ea este introdusă deci prin intermediul relațiilor incompatibile, care determină expresii ce se exclud fără a se nega valoric.

Aceeași autoare încearcă și elaborarea unei *logici intuiționiste pozitive* care să corespundă așa-numitei „matematici intuiționiste pozitive". Aceasta ar fi ceva „între intuiționismul lui Brouwer și intuiționismul fără negație a lui Griss"[166]. În esență, este vorba de introducerea unei negații care să fie definită pozitiv. O propoziție, consideră autoarea, este negativă dacă implică o contradicție, deci

$$\neg p =_{Df} p \rightarrow \emptyset,$$

unde $\emptyset =_{Df} (1 = 2)$.

Trebuie remarcat aici faptul că excluderea arbitrară (formalistă) a negației prin Σ_{fn} necesită reintroducerea ei sub *alte* forme. Numai în cazul unei concepții strict intuiționiste poate fi căutat temeiul excluderii propriu-zise a negației.

D. van Dantzig, care încearcă la rîndul său construcția unei „matematici afirmative", consideră că „intuiționismul este independent de filozofiile speciale pe care le practică intuiționiștii ; adevărata lui semnificație poate fi demonstrată cu mijloace pur tehnice"[167]. Ceea ce își propune D. van Dantzig este în fapt construcția unei teorii „intuiționiste" prin „procedee pur formale" respectiv *formaliste*. Este vorba de obișnuitele transcrieri de calcule, care sînt numite aici „interpretări formaliste ale matematicii intuiționiste" și respectiv „interpretări intuiționiste ale matematicii clasice sau formaliste". Deși par a fi de acord în a respinge așa-numitele „predicate negative", despre care vorbea Brouwer, concepțiile lui D. van Dantzig și ale lui Griss sînt opuse. Ultimul subliniază faptul că „matematica afirmativă (a lui Dantzig) nu reprezintă formalizarea matematicii intuiționiste fără negație, deoarece, relațiile logice $A \supset B$, $A \wedge B$ și $A \vee B$ satisfac în continuare regulile logice cunoscute, ceea ce nu

[166] P. Destouches-Février, *Esquisse d'une mathématique intuitioniste positive*, Comptes rendus de l'Acad. sc., Paris, 225, 1947, p. 1242.

[167] D. van Dantzig, *On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics*, p. 922.

este cazul în matematica fără negație"[168]. Într-adevăr, utilizînd simple transcrieri ca :

$$A \vee B =_{Df} \neg \neg (A \wedge \neg B)$$

$$A \supset B =_{Df} \neg (A \wedge \neg B)$$

în care nu se știe ce reprezintă A și B, și care nu sînt valabile din perspectivă intuiționistă, D. van Dantzig lucrează în realitate cu operații formaliste notate cu simboluri intuiționiste. Griss consideră că sistemul lui D. van Dantzig (Σ_D) este un „sistem formalist". Din punct de vedere pur matematic, Griss îi reproșează „introducerea speciei vide ca subspecie a tuturor speciilor"[169], ceea ce înseamnă, din punct de vedere intuiționist, inversarea raportului dintre *existență* și *definiție*. Într-adevăr, poate fi definită (în manieră formalistă) o „subspecie a tuturor speciilor", dar aceasta nu înseamnă (în manieră intuiționistă) că aceasta există realmente.

Heyting obiectează de asemenea lui van Dantzig modalitatea existențială a utilizării cuantificatorilor[170]. „Inducția completă, susține Heyting, justifică utilizarea fără restricții a cuantificatorilor universali în domeniul numerelor naturale". De acord cu Griss, Heyting consideră că „Sistemul lui van Dantzig, deși interesează din alte puncte de vedere, nu reprezintă o formalizare a matematicii intuiționiste". Deși sistemul Σ_D este corect din punct de vedere formal, el nu poate să ducă la obținerea unor rezultate *pozitive*, singurele care interesează din punct de vedere intuiționist.

Încercările menționate (Destouches-Février și D. van Dantzig) sînt de bună seamă formaliste, cu toate acestea ele au, cel puțin în principiu, legătură cu matematica intuiționistă, spre deosebire de altele, cum ar fi cele încercate de Vredenduin, Teensma, Lorenzen, Valpola și alții. O încercare asemănătoare este cea a lui Glimore[171]. El încearcă, ca și D. Février introducerea unei „negații improprii". Este vorba și aici de o „definiție pozitivă" a „negației", introdusă prin relațiile „=" și „#". Pentru cazul special al numerelor reale apare următoarea situație : dacă $a, b, c, \ldots$ sînt numere reale și dacă

[168] Griss, *La mathématique intuitioniste sans negation*, p. 138.
[169] *Ibidem*, p. 139.
[170] A. Heyting, *Intuitionism in mathematics* (1958), p. 111.
[171] P. C. Glimore, *The effect of Griss'criticism of the intuitionistic logic on deductive theories formalized within the intuitionistic logic*, Proceedings Koniklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 56, 1953.

este cunoscut un număr rațional pozitiv r, astfel încît $|a - b| > r$, atunci are loc $a \# b$. O negație improprie $N(a \# b)$ are loc dacă și numai dacă, pentru orice număr real x, $x \# a$ implică $x \# b$. Este evident că, în aceste condiții, din $N(a \# b)$ se poate conchide $a = b$, ceea ce reprezintă ceva analog cu *negatio duplex*. Deci și pe această cale se încearcă reintroducerea unui alt tip de negație, după ce a fost exclusă negația propriu-zisă.

c) *Semnificația intuiționistă a demonstrației lui Gödel*

Au fost menționate deja (§ e, cap. III) așa-numitele *constante propoziționale nedecidabile* (α^0, β^0, γ^0,...) și faptul că acestea nu pot să apară în teoria intuitivă a logicii intuiționiste nici pe calea directă și nici pe calea indirectă de obținere a paralelismului matematico-lingvistic. Ele pot fi obținute numai prin mijloace străine acestui paralelism. Menținerea lor, în cadrul unor sisteme de tip Σ_{Go} determină admiterea polivalenței, lipsită de sens în context intuiționist. Numai Heyting, după cum s-a amintit, a alunecat pe panta admiterii lor, în discuțiile cu Barzin și Errera, fiind nevoit ulterior să introducă un tip special de negație (negația slabă = nu este adevărat că...) pentru respingerea lor. Aceasta în contextul teoriei intuitive. În Σ_{Hy} apare numai negația tare (este fals că...), constantele propoziționale nedecidabile fiind excluse prin restricție formalistă. Este vorba de variabilele a, b, c,... și de negațiile lor $\neg a$, $\neg b$, $\neg c$,... care nu pot fi înlocuite decît cu constante adevărate (primele) și false (ultimele). Nu sînt introduse variabile pentru constante propoziționale nedecidabile.

De aici urmează că problema nedecidabilității constantelor propoziționale nu afectează sistemul Σ_{Hy}, cum nu afectează dealfel nici sistemele formaliste obișnuite.

Ceea ce trebuie specificat în cazul constantelor propoziționale în discuție este *caracterul material* al nedecidabilității lor, respectiv caracterul *neformal*. Fiind dată (evident prin alte mijloace decît cele intuiționiste, de obținere a paralelismului matematico-lingvistic) o constantă α, care prescurtează o expresie matematică propozițională, se constată că aceasta are, de regulă, aspectul obișnuit, categoric al oricărei teoreme matematice. Multe dintre acestea pot fi ușor demonstrate

cu mijloace formaliste (demonstrație indirectă). Ea se dovedește nedecidabilă (material) numai în contextul teoriei intuitive a logicii intuiționiste, căci numai aici lui α nu-i corespunde o construcție matematică efectivă A, pentru a putea deveni $\neg_t\ \alpha$ și nici o construcție efectivă B, a cărei expresie lingvistică prescurtată prin β să contrazică α, pentru a deveni $\neg_t\ \alpha$. De aici rezultă α^0 = constantă propozițională nedecidabilă material, respectiv *nedecidabilă prin construcție matematică efectivă.*

Dar imposibilitatea obținerii constantelor propoziționale nedecidabile în teoria intuitivă a logicii intuiționiste și excluderea lor prin mijloace formaliste din cadrul sistemelor formale de tip Σ_{Hy} nu înseamnă excluderea *generală* a nedecidabilității. Există și expresii *formal nedecidabile.* Este vorba de anumite formule alcătuite din *variabile.*

În cadrul teoriei intuitive a logicii intuiționiste *este imposibilă* apariția expresiilor formal nedecidabile. Cauza o constituie faptul că obținerea oricărei expresii se face pornind de la expresii admise și operînd numai cu reguli și raționamente universal valabile. Se pare că Paul Finsler a fost primul (1926) care a introdus noțiunea „propoziție formal nedecidabilă". O propoziție, consideră el, este *formal* nedecidabilă „dacă nu este posibilă nici o demonstrație formală pentru această propoziție sau pentru contradictoria ei" [172].

Nedecidabilitatea formală înseamnă deci o reeditare pe plan formal a „nedecidabilității materiale". Cu alte cuvinte, o expresie este nedecidabilă *vi materiae* dacă nu poate fi nici atestată nici negată ; este nedecidabilă *vi formae* dacă nu poate *fi demonstrată formal* nici ea nici contradictoria ei. În primul caz este vorba de expresii propoziționale constante, în al doilea de formule care conțin expresii variabile.

Din acest punct de vedere, demonstrația lui Gödel semnifică *extinderea* enunțului existențial al lui Finsler : „există expresii formal nedecidabile" la un enunț de genul „*în orice* sistem formalist (Σ_{Form}) există expresii formal nedecidabile" [173]. Într-adevăr caracteristicile

[172] P. Finsler, *Formal proof and undecidability*, în „From Frege to Gödel", Harvard University Press, 1967, p. 443.

[173] Prin Σ_{Form} înțelegem „toate sistemele care provin din sistemul lui Russell-Whitehead și Zermelo-Frankel prin adăugarea unui număr finit de axiome, presupunînd că prin axiomele adăugate nu se pot demonstra propoziții false". *Cf.* K. Gödel, *On formally undecidable propositions of Principia mathematica and related systems*. în „From Frege to Gödel", p. 597.

enunțate de Gödel corespund *oricărui* sistem Σ_{Form}. Este vorba de sisteme ale căror formule alcătuiesc „şiruri finite de semne fundamentale (variabile, constante logice şi paranteze, respectiv puncte de despărțire)", de sisteme în care „se poate preciza exact care şiruri de semne fundamentale sînt formule cu sens şi care nu" ş.a.m.d.

„O expresie nedecidabilă în Σ_{Form}, este o formulă P° [în notația noastră] pentru care nu se poate demonstra nici P nici $\sim P$".

Problema care interesează în acest moment este aceea de a şti dacă în sistemele formale intuiționiste (Σ_{Int}) este valabilă sau nu demonstrația lui Gödel. Pentru aceasta nu sînt necesare detaliile demonstrației, ci numai definiția expresiei nedecidabile.

Este uşor de văzut că demonstrația fiind valabilă în Σ_{Form} este valabilă implicit şi în Σ_{Hy} şi Σ_{J}, care sînt în fond sisteme formaliste obişnuite. Ea *nu mai este însă valabilă* în Σ_{Gr} şi în nici un alt sistem intuiționist fără negație.

Într-adevăr, în Σ_{Gr} nu poate să apară nici o formulă P°, deoarece în Σ_{Gr} nu se pune problema demonstrației lui $\sim P$. În orice logică fără negație formulele P° nu semnifică altceva decît faptul că nu poate fi demonstrat P. Or, în această situație se găsesc toate formulele care nu pot fi demonstrate în Σ_{Gr}, fără a crea probleme speciale. Mecanismul demonstrației lui Gödel presupune însă admiterea negației.

Punctul de vedere consecvent intuiționist duce prin urmare atît la evitarea expresiilor nedecidabile *vi materiae* cît şi la evitarea expresiilor nedecidabile *vi formae*. Inconsecvența formalistă a sistemelor de tip Σ_{Hy} nu înseamnă altceva decît readmiterea, sub altă formă, a legii terțului exclus. În aceste sisteme se consideră, într-adevăr, înainte de demonstrația lui Gödel, că pentru orice formulă bine construită P sau se poate demonstra P sau se poate demonstra $\sim P$.

Demonstrația lui Gödel are aceeaşi semnificație intuiționistă, pentru sistemele matematice „formale", ca şi demonstrația lui Brouwer pentru sistemele matematice „materiale". În sistemele matematice „materiale" există expresii nedecidabile *vi materiae* care infirmă valabilitatea generală a legii terțului exclus, după care orice expresie matematică constantă bine construită este sau adevărată sau falsă. În sistemele matematice „formale" există expresii nedecidabile *vi formae* care infirmă valabilitatea generală a legii terțului exclus, după care pentru orice expresie P se poate demonstra sau P sau $\sim P$.

Este vorba aici de *două* nivele logice la care poate acționa sau nu legea terțului exclus : unul este nivelul *formal*, în care apare sau nu

(T) $$p \vee \sim p$$

și altul este nivelul *metaformal* în care apare sau nu

(T′) $$\Delta P \vee \Delta \sim P$$

în care „Δ" înseamnă „demonstrabil", iar P înseamnă variabilă de formule.

Sistemul Σ_{Hy} este un sistem în care nu apare $p \vee \sim p$, dar apare $\Delta P \vee \Delta \sim P$. Din această cauză Σ_{Hy} nu este un sistem Σ_{Int} propriu-zis. S-ar putea spune că Σ_{Hy}, Σ_J și toate celelalte de acest tip sînt sisteme „semiintuiționiste", respectiv $\Sigma_{F/I}$. Numai sistemul lui Griss (Σ_{Gr}) este un sistem Σ_{Int} propriu-zis, în care nu apare nici $p \vee \sim p$ nici $\Delta P \vee \Delta \sim P$.

Gödel însuși remarcă analogia dintre raționamentul său și obișnuitele paradoxe logice [174]. (Situația paradoxală rezidă în faptul că, dacă se demonstrează P atunci se dovedește $\sim P$, iar dacă se demonstrează $\sim P$, atunci se dovedește P. Altfel spus, P se demonstrează în același timp cu negația lui, ceea ce este imposibil). Dar, în cazul paradoxelor obișnuite, *formale* se presupune valabilitatea generală a legii terțului exclus în forma (T), pe cînd în raționamentul lui Gödel se presupune valabilitatea generală a legii terțului exclus în forma (T′). Din această cauză, „paradoxul lui Gödel" poate fi numit *paradox metaformal*. Σ_{Gr} este singurul Σ_{Int} în care este imposibil să apară paradoxe formale sau metaformale.

Teoria intuitivă a logicii intuiționiste, bazată pe primele patru teze intuiționiste, duce implicit la respectarea tezei (V). Imposibilitatea obținerii constantelor propoziționale nedecidabile și a expresiilor formal nedecidabile face imposibilă apariția paradoxelor. Faptul că acestea apar, într-o formă sau alta, într-un sistem formal implică faptul că acest sistem *nu este corespunzător* teoriei intuitive a logicii intuiționiste. Dacă nu se admite acest lucru, atunci apare o altă contradicție și anume aceea dintre teoria intuitivă, conformă cu teza (V) și sistemul formal care încalcă teza (V).

[174] *Ibidem*, p. 598.

Se ajunge astfel la o situaţie curioasă. Σ_{Hy} care corespunde în mai mare măsură decît Σ_{Gr} ansamblului teoriei intuitive a logicii intuiţioniste, prin faptul că admite negaţia şi toate formulele valabile care o conţin, nu corespunde *în esenţă*, prin încălcarea tezei (V), acestei teorii, în timp ce Σ_{Gr}, care corespunde numai acelei părţi din teoria intuitivă a logicii intuiţioniste care nu conţine negaţia, corespunde *în esenţă* întregii teorii.

Faptul că paradoxul metaformal semnalat de Gödel nu poate fi exclus din sistemele formale decît prin excluderea *oricărei* forme de negaţie înseamnă că teoria intuitivă a logicii intuiţioniste *nu poate fi descrisă sau sistematizată corect* (fără încălcarea vreunei teze) *decît în cadrul unui sistem fără negaţie de tip* Σ_{Gr}.

Această concluzie slăbeşte şi mai mult izomorfismul dintre teoria intuitivă a logicii intuiţioniste şi sistemul formal corect în care poate fi descrisă. Sistemul respectiv este mult mai sărac decît teoria intuitivă.

V. LOGICA FORMALISMULUI NEOINTUIŢIONIST

Sistemele formale, despre care a fost vorba pînă în acest moment, sînt numite de regulă „intuiţioniste" şi au, în mai mare sau mai mică măsură, o legătură directă cu intuiţionismul. S-a văzut însă că, în afară de Σ_{Gr}, ele sînt simple sisteme *formaliste*. Faptul că sînt numite „intuiţioniste" nu este însă lipsit de temei, căci legătura lor cu intuiţionismul este nu numai directă, ci şi evidentă. Unele pornesc chiar de la matematica intuiţionistă, altele de la anumite teze intuiţioniste şi, în fine, cele mai reprezentative, ca Σ_{Hy}, sînt legate implicit de teoria intuitivă a logicii intuiţioniste.

Spre deosebire de toate acestea, există însă sisteme care nu mai au legătură directă cu intuiţionismul şi nici nu urmăresc o asemenea legătură, chiar şi în cazurile cînd sînt numite tot „intuiţioniste" sau sînt considerate că reprezintă forma *nouă* a intuiţionismului. Aceste sisteme vor fi numite în continuare sisteme *formalist-neointuiţioniste* şi vor fi notate cu Σ_{FN}.

a) *Sisteme axiomatice formalist-neointuiţioniste*

Formalismul neointuiţionist poate fi caracterizat, în context logic, prin două tendinţe : una este tendinţa formalistă a logicienilor intuiţionişti şi alta este tendinţa „intuiţionistă" a logicienilor formalişti.

Prima tendinţă a fost ilustrată deja. Însuşi sistemul Σ_{Hy} a suferit metamorfoze formaliste. În varianta din 1966 Heyting utilizează pentru variabilele propoziţionale intuiţioniste semnele formaliste p, q, r,... În genere, tendinţa rezidă în pierderea specificului intuiţionist al variabilelor şi al operaţiilor logice. În felul acesta, ceea ce rămîne este un sistem pur formalist, care, dacă porneşte de la Σ_{Hy},

are o axiomă în minus, şi anume pe aceea care se referă la legea terțului exclus, iar dacă porneşte de la Σ_{Gr}, are numai axiome care nu conțin negația.

Punctul de plecare al sistemelor Σ_{FN} nu îl mai constituie deci nici matematica intuiționistă, nici teze ale acesteia şi nici teoria intuitivă a logicii intuiționiste, ci sistemele formale ale logicii intuiționiste. De la aceste sisteme se încearcă apoi *trecerea* la sisteme formaliste propriu-zise, prin adăugarea a ceea ce se consideră că le *lipsește* celor intuiționiste.

A doua tendință este caracterizată de faptul că se porneşte de la sisteme formaliste, în care evident variabilele şi operațiile nu au semnificație intuiționistă, şi se introduc restricții formale, cum ar fi eliminările de axiome. Pe această cale se obțin sisteme „intuiționiste", respectiv sisteme în care nu mai este valabil *tertium non datur* sau alte formule echivalente.

Sistemul Σ_T, al lui Troelstra, reprezintă o modalitate de *trecere* de la un sistem Σ_{Int} la unul Σ_{Form}. Sistemul, în care literele A, B, şi C semnifică variabile de formule; semnul $\Rightarrow$ marchează implicația dintre grupuri de variabile de formule (pentru a evita parantezele); cuvîntul „şi" ține locul conjuncției dintre aceleaşi grupuri, iar semnul $\curlywedge$ înseamnă „falsitate", conține următoarele axiome şi reguli :

(T_1) $A \rightarrow A$,

(T_2) A şi $A \rightarrow B \Rightarrow B$,

(T_3) $A \rightarrow B$ şi $B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$,

(T_4) $A \,\&\, B \rightarrow A$; $B \,\&\, A \rightarrow A$,

(T_5) $A \rightarrow A \vee B$; $B \rightarrow A \vee B$,

(T_6) $A \rightarrow C$ şi $B \rightarrow C \Rightarrow A \vee B \rightarrow C$,

(T_7) $C \rightarrow A$ şi $C \rightarrow B \Rightarrow C \rightarrow A \,\&\, B$,

(T_8) $A \,\&\, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$,

(T_9) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \Rightarrow A \,\&\, B \rightarrow C$,

(T_{10}) $\curlywedge \rightarrow A$.

La acestea se adaugă definiția

(D_1) $\sim A =_{Df} A \rightarrow \curlywedge$

În sistemele care conțin aritmetica, $\curlywedge$ este identic cu $0 = 1$.

Specificul acestui sistem îl constituie faptul că „prin adăugarea legii terțului exclus se obține sistemul clasic Σ_C" [175].

Sistemul lui Kleene Σ_{Kl} reprezintă maniera inversă, trecerea de la un sistem formalist la unul „intuiționist". Σ_{Kl}, pentru calculul propozițional [176] conține următoarele postulate :

(1a) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$,

(1b) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$,

(2) $\dfrac{p, p \rightarrow q}{q}$,

(3) $p \rightarrow (q \rightarrow (p \,\&\, q))$,

(4a) $(p \,\&\, q) \rightarrow p$,

(4b) $(p \,\&\, q) \rightarrow q$,

(5a) $p \rightarrow (p \vee q)$,

(5b) $q \rightarrow (p \vee q)$,

(6) $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r))$,

(7) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim p)$,

(8) $\sim \sim p \rightarrow p$.

Acesta este evident un Σ_{Form}. Trecerea la un sistem Σ_{FN} se face prin înlocuirea lui (8) cu

(8′) $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$,

care corespunde axiomei ($A_{4.1}$) respinsă de Johansson, respectiv

($A_{4.1}$) $\vdash\ \vdash \neg a \supset (a \supset b)$.

Deci se pornește de la un sistem Σ_{Form} și se ajunge la un sistem Σ_{FN} analog sistemului Σ_{Hy}.

Deosebirea dintre cele două tendințe este numai de manieră.

[175] G. Kreisel and A. S. Troelstra, *Formal sistems for some branches of intuitionistic analysis*, Annals of Mathematical Logic, nr. 3, 1970, p. 232.

[176] *Cf.* S. C. Kleene, *Introduction to metamathematics*, Amsterdam, 1967, p. 82.

Aceasta din urmă determinînd doar modalitatea diferită de *expunere* a sistemelor, respectiv faptul că se pornește de la unul și nu de la celălalt, faptul că se tinde către unul și nu către celălalt sau că unul este mai important sau mai general decît celălalt.

Tipic pentru prima tendință este și sistemul Σ_L al lui P. Lorenzen. El pornește însă de la un Σ_{fn} pe care îl numește „logică afirmativă" [177]. Acestui sistem îi adaugă negația și obține „logica efectivă", căreia îi adaugă apoi *tertium non datur* și obține „logica clasică" [178]. Variabilele propoziționale și operatorii rămîn aceiași indiferent de sistemul în care se lucrează. Semnificația variabilelor propoziționale este cea obișnuită (stau pentru propoziții în genere), iar operațiile sînt redate prin matrice de adevăr.

Variabilele și operațiile logice sînt introduse în același mod și de către A. Schmidt [179]. Sistemul său Σ_{Sm} ilustrează însă ambele tendințe formalist-neointuiționiste, de trecere de la un criteriu la altul [180]. El afirmă însă, în mod explicit, că Σ_{Sm} este numit în mod arbitrar „intuiționist", denumirea avînd o „simplă motivare *istorică*" [181].

Faptul că nu se acordă nici o importanță specificului intuiționist al operațiilor logice se vede dealtfel și din modul în care sînt utilizate semnele lor. În Σ_{Kl}, de exemplu, operațiile logice sînt introduse în manieră pur formalistă, prin simboluri, fără nici o explicitare. Unele semne sînt cele obișnuite în logica intuiționistă, ca $\supset$, $\vee$, $\neg$, dar altele, ca & din (3), (4a) și (4b), sînt cele utilizate în logica formalistă. La fel se întîmplă și în Σ_{Sm}, în care apar formule ca (A_{D23}) $a \wedge b \rightarrow a$, unde $\wedge$ este semn intuiționist, iar $\rightarrow$ este formalist. Semnele operațiilor sînt introduse deci în mod arbitrar.

Sistemele Σ_{Kl}, Σ_T și Σ_{Sm} nu sînt Σ_{Int}, dar nu sînt nici simple sisteme Σ_{Form}. Ele nu sînt Σ_{Int}, deoarece variabilele și semnele de operație nu mai au semnificație intuiționistă; ele nu sînt Σ_{Form}, deoarece în cadrul lor nu sînt valabile *tertium non datur*, *duplex negatio* și toate expresiile care pot fi obținute prin intermediul acestora; ele sînt deci *sisteme formalist-neointuiționiste*, respectiv Σ_{FN}. Sistemele Σ_{FN} sînt formaliste în măsura în care pierd semnificația intuiționistă a variabilelor și a operațiilor logice și sînt intuiționiste în

[177] P. Lorenzen, *Formale Logik*, Berlin, 1970, p. 80.
[178] *Ibidem*, p. 93.
[179] A. Schmidt, *Mathematische Gesetze der Logik*, Springer-Verlag, 1960, p. 6 sq.
[180] *Ibidem*, p. 356.
[181] *Ibidem*, p. 343.

măsura în care bifează axiomele discutabile. Deoarece variabilele și operațiile logice sînt independente de axiome și stau la baza acestora, sistemele Σ_{FN} sînt mai mult formaliste decît intuiționiste.

Într-adevăr, dacă este vorba de $a \vee \neg a$, în care semnele nu mai au sens intuiționist, este imposibil să se decidă dacă expresia este acceptabilă sau nu fără să se facă apel la axiomele unui sistem Σ_{FN}. Dacă semnele au sens intuiționist, atunci se poate decide și fără intermediul axiomelor.

Din acest punct de vedere, se poate conchide că sistemele Σ_{FN} reprezintă selectarea și menținerea trăsăturilor pur formale, independente de orice conținut, ale sistemelor Σ_{Int} și $\Sigma_{F/I}$, respectiv concordanța cu teza (VI),

b) *Specificul sistemelor formalist–neointuiționiste*

De obicei, sistemele Σ_{FN} nu numai că sînt numite intuiționiste, cum menționează Schmidt, dar se consideră că reprezintă însăși *logica intuiționistă*, la care este redusă în ultimă instanță întreaga teorie intuiționistă = poziția formalismului neointuiționist. Contra acestei poziții a reacționat Heyting. „Intuiționismul, consideră el, nu poate fi înlocuit cu astfel de interpretări formale" [182]. Aceasta nu înseamnă însă că sistemele Σ_{FN} nu au importanță din punct de vedere intuiționist.

Dacă se stabilește de la început că *orice* Σ_{FN} reprezintă doar „surprinderea și menținerea trăsăturilor pur formale ale sistemelor Σ_{Int} și $\Sigma_{F/I}$", ceea ce înseamnă surprinderea și menținerea trăsăturilor pur formale ale *întregii teorii intuiționiste*, atunci poate fi depășită poziția formalismului neointuiționist și pot fi valorificate rezultatele formale obținute pe această cale.

Sistemele Σ_{Int} și $\Sigma_{F/I}$ pot fi numite *modele* sau „codificări" care reproduc pe plan formal o parte dintre particularitățile logice pe care le determină tezele intuiționiste în cadrul teoriei intuitive. Sistemele Σ_{FN} sînt *modele ale acestor modele*, ele nu au și nu pot avea nici o legătură directă cu intuiționismul.

Reprezentanții formalismului neointuiționist sînt însă de altă părere. Sistemele Σ_{FN} nu sînt elaborate pentru a modela sistemele

[182] A. Heyting, *Logique et intuitionnisme*, p. 82.

intuiţioniste, ci sînt utilizate pentru aşa-numita „construcţie formalistă" a matematicii intuiţioniste.

Comparînd lucrarea lui Heyting *(Intuitionism. An introduction)* cu lucrarea lui Kreisel şi Troelstra *(Formal systems for some branches of intuitionistic analysis)* se observă imediat diferenţa radicală de metodă. Heyting expune matematica intuiţionistă *independent* de logică şi *înaintea* acesteia. Σ_{Hy} apare ca un apendice, care poate fi luat în consideraţie sau nu. Kreisel şi Troelstra încep cu expunerea sistemului logic. Această inversare de planuri este evident străină intuiţionismului, căci, din această perspectivă, nu matematica se dovedeşte fundamentul logicii, ci logica devine fundamentul matematicii, ceea ce contravine tezei (IV). Intuiţionistic vorbind, matematica nu are nevoie de nici o justificare logică ; dimpotrivă, logica, în măsura în care a ajuns la un grad evoluat de simbolizare, trebuie, pentru a deveni o teorie sau un sistem necontradictoriu, pentru a-şi asigura criteriul exactităţii, să apeleze la matematici.

Chiar dacă sistemele formaliste nu ar fi considerate mijloace de construcţie ale matematicii intuiţioniste, cum se face de regulă, afirmîndu-se chiar că Brouwer însuşi ar fi lucrat, fără să-şi dea seama, în mod formalist [183] ceea ce ar încălca teza intuiţionistă (VII), ci se admite că sistemele formaliste ar descrie doar şi ar sistematiza matematica intuiţionistă, tot s-ar ajunge la o concepţie neintuiţionistă, deoarece ar fi încălcată prima parte a tezei (I) —fundamentală pentru doctrina intuiţionistă — după care matematica este o *activitate*, care trebuie practicată, şi *nu o teorie*, gata făcută.

Dealtfel, indiferent de semnificaţia care ar fi atribuită sistemelor Σ_{FN}, acestea nu pot fi puse în corespondenţă directă cu matematica intuiţionistă, deoarece ultima se găseşte în „stadiul întîi", iar sistemele Σ_{FN} se găsesc în „stadiul patru", alcătuind „matematica de ordinul doi". În plus, construcţia sistemelor Σ_{FN} nu are nici o legătură reală cu stadiile intermediare, ci doar, aşa cum s-a menţionat, o legătură aparentă cu sistemele formale intuiţioniste, pe baza tezei (VI). Însă sistemele formale intuiţioniste, ele însele nu sînt decît parţial izomorfe cu teoria intuitivă a logicii intuiţioniste, singura care este legată direct de matematică.

Din această cauză, formaliştii neointuiţionişti, pentru a obţine corespondenţa sperată, încearcă în prealabil transpunerea matematicii intuiţioniste de ordinul întîi, a *activităţii* matematice într-o

[183] J. Myhill, *The formalisation of intuitionism*, în „La philosophie contemporaine", Firenze, 1968, p. 325.

matematică de ordinul doi, într-o *teorie* a matematicii, denaturînd astfel conceptele fundamentale ale celei originare.

Heyting menționează cîteva dintre aceste denaturări indispensabile formalismului neointuiționist. Astfel, conceptul de „succesiune *care înaintează* infinit" trebuie să devină „succesiune infinită" [184]. Alte concepte, ca cel de „alegere" sau cel de „subiect creator", fundamentele pentru *activitatea* matematică, nu pot fi nici măcar denaturate, căci nu au nici o semnificație în *teoria* constituită a matematicii.

Myhill consideră că insuccesele formalismului neointuiționist, în încercarea de a transforma matematica intuiționistă într-una formalistă, ceea ce ar coincide cu „lichidarea" intuiționismului, prin formalizarea ei deplină și fundamentarea logică a tuturor rezultatelor intuiționiste, nu este o dovadă că formalismul în genere nu ar putea să ajungă la acest rezultat, ci doar o dovadă a faptului că nu este *încă* destul de flexibil și de subtil pentru o astfel de sarcină [185].

Prin urmare, sistemele Σ_{FN} se dovedesc nu numai *îndepărtate* de matematica intuiționistă și de logica acesteia, dar și *contrare* principalelor teze intuiționiste, cu excepția tezei (VI), și chiar intuiționismului în genere.

Făcînd abstracție de aceste probleme, care nu interesează direct în lucrarea de față, sistemele Σ_{FN} vor fi considerate ca modele ale sistemelor Σ_{Int} și $\Sigma_{F/I}$, ca menținînd o parte din trăsăturile formale ale acestora din urmă. În acest sens, vor fi urmărite în continuare *implicațiile formaliste* ale sistemelor Σ_{FN} în contextul general al logicii moderne.

1° *Semnificația negației în sistemele* Σ_{FN}

Una din trăsăturile fundamentale ale oricărui Σ_{FN} o constituie importanța acordată negației. Negația nu mai reprezintă o simplă operație logică, alături de celelalte, ci devine o caracteristică a sistemului formal. Adăugarea sau omiterea ei nu mai înseamnă pur și simplu redarea *aceleiași* logici prin intermediul altor operatori, cum se petrece, în cadrul sistemelor formaliste obișnuite. Aceeași logică poate fi redată formalistic prin implicație și negație (Frege, Lukasiewicz),

[184] A. Heyting, *Intuitionism in mathematics*, în: „La philosophie contemporaine", Firenze, 1968, p. 320.

[185] J. Myhill, *Formal systems of intuitionistic analysis* I, în: „Logic, methodology and Philosophy of Science", III, Amsterdam, 1968, p. 162.

implicație și disjuncție (Russell), conjuncție și negație (Sobocinski — 1939) ș.a.m.d.

Un sistem Σ_{FN} este un sistem Σ_{fn} (fără negație) dacă nu conține nici o *axiomă* în care să apară negația și nici o *definiție* prin care să fie introdusă. Sistemul lui Russell conține axiome în care nu apare negația, ci numai implicația și disjuncția, dar Σ_R nu este un Σ_{fn} deoarece implicația ($p \rightarrow q$) este o simplă abreviere a formulei ($\sim p \vee q$), care conține negația.

Nici un sistem Σ_{FN} fără negație, nu poate fi un Σ_{Int}, căci niciunul nu coincide cu sistemul lui Griss. Într-adevăr Σ_{Gr} conține numai implicația și conjuncția, fără nici o definiție abreviativă. Deci nici o expresie care conține alți operatori, afară de conjuncție și implicație, nu este valabilă în Σ_{Gr}. De exemplu formula $p \rightarrow (p \vee q)$, care apare ca axiomă în toate sistemele Σ_{FN}, nu este valabilă în Σ_{Gr}, deși nu conține negația.

Sistemele Σ_{FN} reproduc însă, în calitate de Σ_{fn}, trăsătura pur formală a sistemului Σ_{Gr}, prin aceea că în cadrul lor *nu este aplicabilă demonstrația lui Gödel*. Sistemele Σ_{fn} se dovedesc astfel modele formale ale sistemului Σ_{Gr}, care la rîndul său este un model al teoriei intuitive a logicii intuiționiste.

Adăugarea negației, prin axiome care conțin negația (Σ_{Sm}) sau prin definiția negației, permite aplicarea demonstrației lui Gödel, cu toate că simpla introducere a negației nu înseamnă admiterea legii terțului exclus. Deci, deși nu este valabilă ($p \vee \sim p$) se consideră că pentru orice propoziție P se poate demonstra sau P sau $\sim P$, iar acest lucru nu este valabil (după Gödel).

Situația aceasta a fost observată de P. Lorenzen, care studiază pe larg problema negației. El constată că există mai multe accepții ale negației. Se poate vorbi, în primul rînd de negația care apare în cadrul propozițiilor elementare[186]. „Socrate nu este om” este negația propoziției „Socrate este om”. Redate prin apartenență, se obțin două expresii opuse

$$(s \in \Omega) \text{ și } (s \sim \in \Omega).$$

Față de acest tip de negație, poate fi introdusă alta care se referă la întreaga propoziție și se obține

(40) $$\sim (s \in \Omega) = (s \sim \in \Omega),$$

(41) $$\sim (s \sim \in \Omega) = (s \in \Omega),$$

[186] *Cf.* P. Lorenzen, *Formale Logik*, p. 87—88.

Formula (41) seamănă deja cu *negatio duplex*, deși cele două negații nu sînt de același tip. *Tertium non datur* poate să apară însă și la nivelul primei negații, astfel

(42) $$(s \in \Omega) \vee (s \sim \in \Omega).$$

Negatio duplex poate fi coborîtă și ea chiar la nivelul termenilor, dacă se introduce o negație specială și pentru ei, de exemplu

(43) $$(s \sim \in \sim \Omega) = (s \in \Omega).$$

Tertium non datur la acest nivel poate să ia forma

(44) $$(s \in \Omega) \vee (s \in \sim \Omega)$$

Însă numai dacă se face abstracție de structura propozițiilor elementare, atunci se poate vorbi de o *duplex natio* propriu-zisă, ca în

(45) $$\sim \sim p = p,$$

în care cele două semne sînt de același tip.
Pentru *tertium non datur* formulele

(46) $$(s \in \Omega) \vee \sim (s \in \Omega),$$

(47) $$(s \sim \in \Omega) \vee \sim (s \sim \in \Omega),$$

(48) $$(s \in \sim \Omega) \vee \sim (s \in \sim \Omega),$$

(49) $$(s \sim \in \sim \Omega) \vee \sim (s \sim \in \sim \Omega),$$

sînt toate de același tip cu

(50) $$p \vee \sim p,$$

căci aici contează doar negația dinafara parantezelor.

Excluderea formulei (50) înseamnă deci excluderea tuturor formelor de terț exclus *subordonate* lui $(p \vee \sim p)$. Dar mai există un tip de negație care nu este subordonat lui $(p \vee \sim p)$. Într-adevăr, expresia (T′) poate fi transcrisă și în forma

(T″) $$\Delta P \vee \sim \Delta P.$$

căci $\Delta \sim P$ înseamnă același lucru cu $\sim \Delta P$, respectiv „se demonstrează $\sim P$" înseamnă „nu se demonstrează P". La acest nivel intervine restricția lui Gödel.

Se poate conchide că admiterea negației fără admiterea formulei $(p \vee \sim p)$ nu înseamnă excluderea *oricărei* forme de terț exclus.

Admiterea demonstraţiei lui Gödel înseamnă admiterea cerinţei de a exclude *orice formă* a terţului exclus; acest lucru nu poate fi realizat decît prin excluderea *totală* a negaţiei.

Excluderea totală a negaţiei duce, într-adevăr, la ceea ce ar putea fi numit un „calcul perfect", lipsit de orice contradicţii. Un astfel de calcul perfect este orice Σ_{fn}, care reproduce pe plan formalist, arbitrar „perfecţiunea" sistemului Σ_{Gr}.

Dar toate sistemele Σ_{fn} reproduc o dată cu „perfecţiunea" şi *lipsa de efectivitate* a sistemului Σ_{Gr}. Dacă sînt admise *numai* expresiile *asertate*, aşa cum se întîmplă în Σ_{Gr}, este evident că logica devine doar un mijloc de sistematizare a unor *rezultate logice obţinute deja* prin simpla exprimare a construcţiilor matematice intuitive. Sistemele Σ_{fn} sînt sisteme *afirmative*, căci afirmă rezultatele ferme ale matematicii intuiţioniste şi sînt *pozitive*, căci poartă aici numai asupra a ceea ce există, dar le lipseşte *efectivitatea*.

Adăugarea negaţiei, înseamnă după P. Lorenzen *efectivizarea* sistemelor formale. Ce-i drept, logica efectivă nu se reduce doar la adăugarea negaţiei, căci aceasta determină şi restrîngerea celorlalte operaţii la semnificaţia lor efectivă [187]. Dar şi invers, semnificaţia efectivă a operaţiilor logice presupune negaţia, căci calculul lui Heyting, la care se referă Lorenzen, conţine negaţia. S-ar putea vorbi, în termenii lui Lorenzen, despre o diferenţă între semnificaţia doar „operativă" şi semnificaţia „efectivă" a operaţiilor logice. Lorenzen concepe un calcul cu semne care nu au nici o semnificaţie. Asupra acestor semne pot fi efectuate anumite operaţii pe baza unor reguli. Calculul K_2, de exemplu [188], are un început (A_1) şi două reguli (R_1) şi (R_2). Se operează asupra semnelor „○" şi „●" şi sînt utilizate variabilele a şi b. (A_1) este „○", iar (R_1) este $a \Rightarrow a$ ● şi (R_2) este $a, b \Rightarrow ab$. Pe cale pur operativă poate fi obţinut, de exemplu, „○●●○●○●●●". Se procedează astfel:

(1)	○	(A_1)
(2)	○●	(R_1); $1 \Rightarrow 2$
(3)	○●●	(R_1); $2 \Rightarrow 3$
(4)	○●●○●	(R_2); $3, 2 \Rightarrow 4$
(5)	○●●●	(R_1); $3 \Rightarrow 5$
(6)	○●●○●○●●●	(R_2); $4, 5 \Rightarrow 6$

[187] *Cf.* P. Lorenzen, *Metamathematik*, Mannheim, 1962, p. 12.

[188] *Cf.* P. Lorenzen, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Springer-Verlag, 1969, p. 13.

Operaţiile logice din cadrul unui calcul Σ_{fn} au *numai* o astfel de semnificaţie „operativă". Adică fiind dată o expresie, ea poate fi obţinută *operînd* asupra unei alte expresii dată iniţial. Efectivitatea pare să rezulte din respingerea falsului sau a contradicţiei, pe care le introduce negaţia. Negaţia nu mai este concepută în Σ_{Ln} (sistemul lui Lorenzen cu negaţie) ca simplă *operaţie* care semnifică trecerea de la p la $\sim p$. $\sim p$ este definit drept $p \rightarrow \curlyvee$. Aici negaţia are un efect şi anume falsul sau contradicţia; $\sim p$ nu mai poate fi considerat adevărat ca în Σ_C, respectiv „dacă este fals p, atunci este adevărat $\sim p$".

Calculul efectiv, respectiv Σ_{FN} este mai bogat decît calculul operativ, respectiv Σ_{fn}, căci în Σ_{FN} nu numai că se poate demonstra P, dar pentru oricare P se poate demonstra sau P sau $\sim P$. Efectivitatea aduce însă cu sine pericolul contradicţiei (demonstraţia lui Gödel).

Trebuie subliniat aici faptul că efectivitatea sistemelor Σ_{FN} este o efectivitate pur logică; ea nu are şi nu poate să aibă nici o influenţă asupra matematicii intuiţioniste, care este efectivă *independent* de acest nivel logic.

2°. *Semnificaţia principiilor logice*

Sistemele Σ_{FN} sînt sisteme în care nu sînt valabile *tertium non datur* şi *negatio duplex*. Acest lucru reflectă pe plan pur formal *critica* intuiţionistă a principiilor logice, determinată de concepţia dialectică a intuiţioniştilor în fundamentele matematicilor.

În sistemele Σ_{Form} legile logice erau reduse la simple formule tautologice. Uneori apăreau, ce-i drept, şi ca axiome (în sistemul lui Frege apare (A_5) $\sim \sim p \rightarrow p$), dar fără să joace un rol deosebit. Simplul fapt că ele erau deductibile din alte formule (în cel puţin un sistem) însemna că nu mai pot fi considerate drept *legi fundamentale* ale logicii.

Din punct de vedere pur formal în orice Σ_{FN} se constată că *tertium non datur* şi *negatio duplex* au un statut deosebit, existînd posibilitatea respingerii lor *simultane*. Respingerea lor nu implică însă respingerea celorlalte legi, respectiv a principiului identităţii şi noncontradicţiei. Istoric s-a constatat faptul invers, că respingerea principiului identităţii şi a principiului noncontradicţiei implică şi res-

pingerea lui *tertium non datur* și respectiv a lui *negatio duplex*[189]. „Respingerea" are aici sensul de contestare a valabilității universale, care formal implică faptul că legile în discuție nu mai pot fi considerate tautologii.

Barzin și Errera au atras atenția asupra faptului că „Principiile logice nu sînt adevăruri izolate unele de altele, astfel încît să le admitem pe unele, iar pe celelalte să le respingem. Ele formează un mănunchi bine legat. Dacă atingem una din părțile ansamblului, atunci toate celelalte trebuie să fie modificate"[190]. Se constată însă că acest „ansamblu de legi" dacă este transpus pe plan pur formal, prin transformarea legilor în tautologii se divide în două părți : una care conține legea identității și legea noncontradicției și alta care conține legea terțului exclus și legea dublei negații (legea temeiului sau a rațiunii suficiente nu apare în formă tautologică).

Raportul dintre legi în cadrul celor două părți este evident, dacă este respinsă una, atunci trebuie respinsă și cealaltă. În ce privește admiterea lor, este discutabil dacă ele se presupun reciproc sau nu. Johansson a demonstrat că în Σ_J admiterea lui $\neg \neg a \supset a$ presupune și admiterea lui $a \vee \neg a$, dar invers nu. Numai din $a \vee \neg a$, fără a fi utilizată și $(a \wedge \neg a) \supset b$, în Σ_J uu poate fi dedus $\neg \neg a \supset a$. Aceasta înseamnă că, în anumite calcule formale, *negatio duplex* este „mai tare" decît *tertium non datur*.

În ce privește raportul dintre legea identității și a noncontradicției, pare evident că a doua o presupune pe prima, pe cînd prima nu o presupune pe a doua, dar acest lucru ar trebui demonstrat, respectiv ar trebui demonstrat dacă întotdeauna sau numai în anumite calcule are loc această relație, sau dacă, dimpotrivă, nu are loc și relația inversă.

Deci există o conexiune în ansamblul legilor logice, dar nu à la Barzin și Errera, după care fiecare lege în parte ar influența întregul ansamblu.

Adăugarea uneia dintre legile grupei a doua *(tertium non datur* sau *negatio duplex)* transformă sistemele Σ_{FN} în sisteme Σ_C, respectiv în sisteme Σ_{Form}. Este interesant faptul că P. Lorenzen, vorbind despre această trecere, în cadrul calculelor cu predicate, respectiv cvantoriale, numește „calcul cvantorial fictiv"[191] calculul cvantorial Σ_{FN}

[189] Al. Surdu, *Probleme logiciste, formaliste și intuiționiste in filozofia greacă*, în „Probleme de logică", vol. VI, Buc. 1975, p. 160—161.
[190] M. Barzin și A. Errera, *Sur le principe du tiers exclu*, p. 18.
[191] P. Lorenzen, *op. cit.*, p. 78.

la care se adaugă *tertium non datur* și în care devine valabilă formula $\sim \sim p = p$. Calculul clasic este fictiv deoarece o parte din formele sale „sînt valabile numai în calcule speciale" [192]. Aceste calcule privesc propozițiile elementare. În terminologia noastră este vorba de calcule care conțin forme ale legii terțului exclus *subordonate* lui $(p \vee \sim p)$.

În logica intuiționistă și în genere în logica modernă nu s-a pus și nici nu se poate pune problema relativizării legilor din grupa a I-a. Este interesant faptul că Brouwer însuși, a cărui concepție general filozofică abundă în probleme dialectice, imposibil de conceput atîta timp cît se admite valabilitatea absolută a principiului identității și al noncontradicției, nu pune niciodată la îndoială valoarea acestora.

Acest lucru poate fi totuși justificat în contextul general al *filozofiei* neointuiționiste (în varianta lui Brouwer).

Punctul central al filozofiei lui Brouwer îl constituie *intuiția originară*. Aceasta este pe de o parte *a posteriori*, rezultatul unui proces complicat de autoînstrăinare a conștiinței, în cadrul căreia aceasta se opune sieși scindîndu-se în *obiect (Ding)* și subiect din a căror confruntare se naște intuiția originară, pe de alta, *a priori*, față de construcția efectivă a *lucrurilor (Sachen)*, care nu pot fi concepute decît în cadrul unor stări de fapt, iar aceste stări, consideră Brouwer, sînt produsul acțiunilor umane, *raționale*, al căror fundament îl constituie intuiția originară [193].

Din această perspectivă, făcînd abstracție de interpretarea declarat idealist-subiectivă a concepției lui Brouwer, devine evident faptul că numai în perioada *anterioară* intuiției originare, și prin aceasta rațiunii însăși, se poate vorbi de procese care nu se mai supun legilor din grupa a I-a. Dar această perioadă, în măsura în care este prerațională, nu-și are locul în știință. Brouwer lasă să se înțeleagă faptul că o situație analogă ar exista în religie și în ceea ce el numește înțelepciune *(Wijsheid)*. Toate acestea sînt, după părerea lui, străine de logică [194].

Construcția rațională a lumii este o construcție matematică, ultima avînd ea însăși o dialectică imanentă. Dialectica matematicii este dialectica timpului, a scurgerii succesive de trăiri, dezbrăcate prin abstracție de orice conținut concret și *identificate*, prin actul

[192] P. Lorenzen, *Formale Logik*, p. 94.

[193] *Vide* amănunte în Al. Surdu, *Elemente dialectice în epistemologia intuiționistă*, Revista de filozofie, nr. 2, 1975.

[194] L. E. J. Brouwer, *De onbetrouwbaarheid...*, p. 7 și p. 12.

intuiției originare, drept forme goale. Acestea garantează, pentru Brouwer, principiul identității și al noncontradicției. Dar ,,scurgerea timpului ,,însăși, infinitul matematic potențial, numit și ,,mediul devenirii libere'' nu se mai supune legilor din grupa a doua.

Faptul că în cadrul teoriei logice intuitive a matematicii intuiționiste nu apar raționamente bazate pe legile din grupa a doua se datorește tocmai paralelismului matematico-lingvistic pe baza căruia a fost construită teoria și contribuie prin urmare la *menținerea* pe plan *logico-intuitiv* a *determinațiilor dialectice ale matematicii intuiționiste*. Excluderea axiomelor, care conțin principii din grupa a doua, din cadrul sistemelor Σ_I și $\Sigma_{F/I}$, se datorește faptului că acestea sînt modele parțial izomorfe cu teoria intuitivă. Ele *reproduc* deci, pe plan pur *formal*, o parte din *notele dialectice ale teoriei intuitive*. În fine, sistemele Σ_{FN}, care sînt modele ale modelelor, în care este pierdută semnificația intuiționistă a variabilelor și a operațiilor logice din Σ_I și $\Sigma_{F/I}$, *reproduc*, de data aceasta pe plan *formalist*, o parte din *notele dialectice ale sistemelor formale intuiționiste* și anume *posibilitatea* de a exclude dintre axiome principiile din grupa a doua. Faptul că excluderea însăși, la acest nivel, nu mai are nici un temei evident și poate fi operată în mod arbitrar, prin simplu joc formalistic, *maschează* aspectul ei dialectic.

Dar sistemele Σ_{FN} n-au fost obținute pe această cale. Dacă nu ar fi existat matematica intuiționistă, încercările de a o descrie pe plan logico-intuitiv și sistemele intuiționiste, ar fi fost *practic imposibilă* construcția lor. Nu trebuie uitat că tocmai formaliștii au fost cei mai *înverșunați adversari* ai logicii intuiționiste, deși, în aparență, ei ar fi trebuit s-o adopte cel mai ușor, fiind vorba, după ei, de ,,simpla bifare a unei axiome''.

În realitate, admiterea *posibilității* formaliste de excludere, a principiilor din grupa a doua înseamnă pătrunderea într-o formă foarte abstractă, *a notelor dialectice ale sistemelor formalist-neointuiționiste* în cadrul teoriei moderne a sistemelor formale.

c) *Sistemul deducției naturale*

De multe ori sistemul deducției naturale Σ_{Dn} a lui Gentzen, respectiv acea parte a sistemului pe care el o numește ,,calculul NJ'' este considerat drept o ,,metodă de formalizare a logicii intuiționiste'' alături de ,,metoda axiomatică a lui Heyting. ,,Există, spune Mostowski, o metodă mai elegantă (decît cea a lui Heyting) de for-

malizare a logicii intuiţioniste, şi anume metoda lui Gentzen'' [195]. În realitate, Gentzen însuşi menţionează faptul că el tratează nu despre teoria sau logica intuiţionistă neformalizată ci ,,despre logica intuiţionistă, sub aspectul ei formalizat pe care i l-a dat Heyting'' [196]. Este deci evident că Σ_{Dn} nu este un model logic nici al teoriei intuitive a logicii intuiţioniste şi nici al matematicii intuiţioniste, ci un model al modelului logic Σ_{Hy}. Deci Σ_{Dn} este un sistem formalist-neointuiţionist Σ_{FN}.

Scopul lui Gentzen este acela de a dezvolta raţionamentele logice, cunoscute deja, într-o manieră care, consideră el, este mai apropiată de raţionamentele matematice, pe care le numeşte ,,reale''.

Diferenţa dintre sistemele axiomatice Σ_{FN} şi Σ_{Dn} constă în aceea că, în primele, formulele adevărate sînt deduse dintr-o serie de alte formule, considerate axiome, prin intermediul unui număr redus de procedee, în timp ce în Σ_{Dn} nu se porneşte de la axiome, respectiv de la formule admise anterior, ci de la *ipoteze* cărora li se adaugă deducţii logice, ca la urmă rezultatul să fie reconsiderat independent de ipotezele de la care s-a pornit.

Avantajul formal al deducţiei naturale îl constituie faptul că demonstraţia *porneşte de la formula care trebuie demonstrată.* În sistemele axiomatice, fiind dată o formulă complicată nu se poate şti de la început din care axiomă este deductibilă. Din această cauză, sînt necesare anumite operaţii asupra formulei pentru a o aduce la o formă convenabilă. Este vorba în realitate de o *dublă* demonstraţie, una prin care formula este *redusă* la o anumită axiomă şi alta prin care este *dedusă* apoi din acea axiomă. Prima fază a demonstraţiei este cea mai complicată.

Deducţia naturală este în fond o *decizie matricială simplificată.* Dealtfel Gentzen introduce chiar de la început semnul $\curlywedge$ = propoziţie adevărată şi $\curlyvee$ = propoziţie falsă [197], ceea ce înseamnă, de la început, că Σ_{Dn} nu poate să corespundă logicii intuiţioniste căci operaţiile logice intuiţioniste nu pot fi interpretate bivalent. Altfel spus Σ_{Dn} este *un model bivalent* al sistemului Σ_{Hy}.

Considerăm exemplul lui Gentzen

$$(E_1) \qquad (p \vee (q \,\&\, r)) \rightarrow ((p \vee q) \,\&\, (p \vee r)).$$

[195] A. Mostowski, *Formalization of the intuitionistic logic*, Acta Philosophica Fennica, XVII, 1965, p. 12.

[196] G. Gentzen, *Recherches sur la déduction logique*, Paris, 1955, p. 3.

[197] *Ibidem*, p. 8.

Dacă notăm primul membru cu A și al doilea cu B, obținem $A \rightarrow B$. Matricea bivalentă a lui $A \rightarrow B$ este

(1)

	A,	B	$A \rightarrow B$
a	⋏	⋏	⋏
b	⋏	⋎	⋎
c	⋎	⋏	⋏
d	⋎	⋎	⋏

Se constată că $A \rightarrow B$ este falsă (⋎) numai dacă A este adevărat (⋏) și B fals (⋎), în restul cazurilor este adevărată. Din matricea implicației este reținut numai cazul b, ceea ce înseamnă o simplificare a matricei respective. Problema care se pune este următoarea: este oare posibil, în cazul lui (E_1) ca A să fie adevărat și B fals? Pentru a soluționa problema se presupune că A ar fi adevărat și se cercetează B în funcție de această presupunere. Dacă presupunînd că A este adevărat, B se va dovedi fals, atunci $A \rightarrow B$ va fi falsă; în caz contrar va fi adevărată.

Presupunem deci că A este (⋏), respectiv că

(2) $$(p \vee (q \,\&\, r)) = \text{Adevărat}.$$

Expresia (2) conține trei variabile diferite. Dacă notăm valorile lor posibile una față de cealaltă obținem

(3)

	p	q	r
a	⋏	⋏	⋏
b	⋏	⋎	⋎
c	⋏	⋏	⋎
d	⋎	⋎	⋎
e	⋎	⋎	⋏
f	⋎	⋏	⋏
g	⋏	⋎	⋏
h	⋎	⋏	⋎

Dacă notăm cei doi membri ai disjuncţiei (2) cu C şi D obţinem matricea disjuncţiei

(4)

	C,	D	$C \vee D$
a	⅄	⅄	⅄
b	Y	Y	⅄
c	Y	⅄	⅄
d	Y	Y	Y

Constatăm că este suficient ca unul dintre membrii disjuncţiei să fie adevărat pentru ca disjuncţia să fie adevărată. Reducem deci cazurile a, b, c, d la b şi c. Aceasta este a II-a simplificare, de data aceasta în matricea disjuncţiei.

Presupunem că ar fi adevărat primul membru, respectiv p. Urmărim în (3) şi observăm că p este (A) în cazurile a, b, c, g. Reducem întreaga matrice la aceste cazuri (a III-a simplificare). Ea devine:

(5)

	p	q	r
a	⅄	⅄	⅄
b	⅄	Y	Y
c	⅄	⅄	Y
g	⅄	Y	⅄

Cercetăm acum membrul B al lui (E_1). El conţine conjuncţia $(p \vee q)\&(p \vee r)$. Notînd primul membru cu E şi al doilea cu F obţinem matricea (6) cu patru cazuri, pe care le reducem la unul singur (cînd ambii membri sînt adevăraţi = a IV-a simplificare). Considerăm apoi fiecare membru în parte, ceea ce presupune încă două matrice (7) şi (8), la care se aplică de două ori simplificarea a II-a de la matricea (4), respectiv se presupune că cel puţin un membru trebuie să fie adevărat. Dar atît în E cît şi în F unul dintre membri este p, iar p, conform matricei (3) este adevărat indiferent de valoarea lui q, deci $(p \vee q)$ este adevărată dacă e adevărat p şi indiferent de valoarea lui r, deci $(p \vee q)$ este adevărată. Dar ambele fiind adevărate este

adevărată şi conjuncţia $(p \vee q) \& (p \vee r)$. Prin urmare, dacă p din primul membru al expresiei E_1 este adevărat, atunci este adevărat şi al doilea.

Acelaşi lucru trebuie verificat apoi şi pentru cazul în care $(q \& r)$ este adevărat, respectiv al doilea membru al disjuncţiei (2). Operînd numai cu simplificările obţinem : atît q cît şi r sînt adevărate ; q fiind adevărat, este adevărată $(p \vee q)$; r fiind adevărat este adevărată $(p \vee r)$; $(q \& r)$ fiind adevărată este adevărată şi $(p \vee q) \& (p \vee r)$; dacă este adevărat primul membru al implicaţiei E_1 este adevărat şi al doilea, deci E_1 este adevărat.

Deducţia naturală reprezintă prin urmare o simplificare substanţială a deciziei matriciale.

În calculul Σ_{Dn} se introduc o serie de scheme care fac inutile referinţele directe la matrici. Aceste scheme sînt redate prin ceea ce Gentzen numeşte „figuri de derivare". De exemplu, de la p se ajunge la $(p \vee q)$ sau $(p \vee r)$ fără a mai cerceta matricea simplificată (3) pe baza figurii

$$(\mathrm{OE}) \quad \frac{\mathrm{A}}{A \vee B} \quad \text{sau} \quad \frac{\mathrm{B}}{A \vee B},$$

numită „introducerea disjuncţiei". Tot aşa de la $(q \& r)$, dacă se admite ca adevărat, se trece automat la q şi la r, căci fiind adevărat $(q \& r)$ este implicit adevărat q şi adevărat r. Generalizat apare figura

$$(\mathrm{UB}) \quad \frac{\mathrm{A} \& \mathrm{B}}{A} \quad \text{sau} \quad \frac{\mathrm{A} \& \mathrm{B}}{B}$$

numită „eliminarea conjuncţiei". Tot astfel apare figura

$$(\mathrm{UE}) \frac{\mathrm{A}, \quad \mathrm{B}}{A \& B},$$

numită „introducerea conjuncţiei" ş.a.m.d.

Toate aceste figuri de derivare simplifică evident decizia matricială şi o maschează. Dar nici una din aceste figuri şi nici aplicaţiile lor nu sînt valabile fără definiţia matricială a operaţiilor logice. Cu toate simplificările, demonstraţiile din Σ_{Dn} sînt destul de greoaie şi incomode.

Iată cum arată demonstraţia lui (E_1) în Σ_{Dn} :

$$\dfrac{\dfrac{p \lor (q \,\&\, r) \qquad \dfrac{\dfrac{p}{p \lor q}\,\text{OE} \quad \dfrac{p}{p \lor r}\,\text{OE}}{(p \lor q) \,\&\, (p \lor r)}\,\text{UE} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{q \,\&\, r}{q}\,\text{UB}}{p \lor q}\,\text{OE} \quad \dfrac{\dfrac{q \,\&\, r}{r}\,\text{UB}}{p \lor r}\,\text{OE}}{(p \lor q) \,\&\, (p \lor r)}\,\text{UE}}{(p \lor q) \,\&\, (p \lor r)}\,\text{OB}}{(p \lor (q \,\&\, r)) \to ((p \lor q) \,\&\, (p \lor r))}\,\text{FE}$$

Aici apar în plus figurile (OB) = eliminarea disjuncției și (FE) = = introducerea implicaţiei.

Deosebirea dintre decizia matricială şi Σ_{Dn} o constituie faptul că în Σ_{Dn} *nu sînt admise* toate figurile de derivare care ar putea să rezulte matricial. Astfel nu este admisă figura

$$(\text{DD}) \ \frac{\sim \sim A}{A},$$

care nu este altceva decît o formă inferenţială a lui *duplex negatio* care ar putea fi numită şi ,,eliminarea dublei negaţii''. Dacă la Σ_{Dn} se adaugă figura (DD), atunci se obține un Σ_C, respectiv un Σ_{Form}.

Σ_{Dn} este un sistem cu ajutorul căruia poate fi elaborat un calcul bivalent în care nu apar decît formulele admise în Σ_{Hy}, este prin urmare un model bivalent al lui Σ_{Hy}. Temeiul său îl constituie faptul că toate formulele din Σ_{Hy} sînt demonstrabile în Σ_C ; problema este doar aceea de a introduce restricţii prin care să nu poată fi demonstrate şi formule care sînt valabile în Σ_C dar nu sînt valabile în Σ_{Hy}.

Pe de altă parte, figurile de derivare pot fi transcrise şi utilizate ca axiome, dacă linia despărţitoare este înlocuită cu semnul implicaţiei, ca în cazurile

$$\frac{A \,\&\, B}{A} \ \text{care devine } (A \,\&\, B) \to A$$

$$\frac{A \,\&\, B}{B} \ \text{care devine } (A \,\&\, B) \to B$$

R. Harrop, care încearcă o expunere originală a sistemului Σ_{Hy}, elaborează două modele Σ_{FN}, unul axiomatic și altul natural folosind aceleași formule transcrise dintr-un calcul în celălalt[198].

Sistemul său Σ_{Hr} conține axiome ca:

(1) $$p \rightarrow (q \rightarrow p),$$

(2) $$(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)),$$

care în calculul natural devin

$$(1') \quad \frac{p}{q \rightarrow p} \qquad (2') \quad \frac{p \rightarrow q}{(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)}$$

Utilizînd deducția naturală, P. G. J. Vredenduin încearcă elaborarea unui sistem Σ_{fn}, cu intenția clară de a modela sistemul Σ_{Gr} [199]. Lucrînd strict formal își permite să introducă în sistemul său (Σ_{Vr}) operatorul disjuncției drept „semn nedefinit", cu toate că disjuncția nu are sens în Σ_{Gr}. Prin aceasta, Σ_{Vr} se dovedește a fi un sistem obișnuit Σ_{FN} în care, spre deosebire de cele studiate, se încearcă reintroducerea negației în sensul lui Glimore, adică prin intermediul relațiilor „ = " (identic) și „ # " (distinct) [200]. În felul acesta este introdusă definiția negației

$$\sim p(x) =_{Df} p(y) \rightarrow y \# x.$$

Aceasta consideră el „nu este o negație propriu-zisă". Dar astfel, după cum remarcă și Heyting, „în calculul lui Vredenduin se poate obține legea terțului exclus" [201], și deci Σ_{Vr} nu poate fi considerat drept model adecvat pentru Σ_{Gr}.

d) *Modelele semantice ale lui Beth*

Pornind de la distincțiile, introduse de Brouwer, între matematica de ordinul întîi și cea de ordinul doi, dar făcînd abstracție de celelalte ordine și încercînd o interpretare originală a ordinelor admise,

[198] *Cf.* R. Harrop, *On disjunctions and existential statements*, Math. Annalen, 132, p. 349—350.

[199] *Cf.* P. G. J. Vredenduin, *The logic of negationless mathematics*, Compositio Mathematica, 11, 1953, p. 204.

[200] *Ibidem*, p. 226.

[201] A. Heyting, *Intuitionism in mathematics*, p. 110.

dar inadecvată teoriei lui Brouwer, filozoful olandez E. W. Beth, urmînd calea logicistă a cercetărilor semantice, în speţă a metodelor lui Tarski, inaugurează aşa-numita „construcţie semantică a logicii intuiţioniste".

El consideră că matematica de ordinul întîi sau „metoda matematică" este orientată către entităţile matematice (numere, progresii, funcţii, mulţimi) şi către proprietăţile şi relaţiile reciproce dintre aceste entităţi [202]. Această opinie, corectă din punct de vedere clasic, nu este însă admisibilă din punct de vedere intuiţionist. Întradevăr, pe această cale se poate considera, foarte simplu, că entităţile matematice preexistă construcţiei lor intuitive. „Comunicarea rezultatelor", care necesită „denumiri pentru entităţile matematice, cît şi pentru proprietăţile şi relaţiile lor" = „terminologia matematică", ţine tot de matematica de ordinul întîi (la Brouwer „terminologia matematică" apare în *stadiul al doilea* al matematicii de ordinul întîi). Matematica de ordinul doi, consideră Beth, este acelaşi lucru cu metamatematica sau teoria demonstraţiei a lui Hilbert ; ea nu este orientată către entităţile matematice sau relaţiile şi proprietăţile lor, ci către elementele terminologiei matematice, către propoziţii, definiţii, demonstraţii, obţinute prin combinarea elementelor terminologice. Pentru a obţine rezultate nu mai este necesar să fie utilizate „numele entităţilor matematice, ale relaţiilor şi ale proprietăţilor, ci numele elementelor terminologiei matematice, a căror totalitate constituie terminologia metamatematică".

Aici este vorba, într-adevăr, de matematica de ordinul doi. Brouwerian vorbind, este vorba de *stadiul patru* al dezvoltării matematice, care nu mai prezintă interes pentru intuiţionist. Beth sare peste *stadiul trei*, stadiul „paralelismului logico-matematic". Acest salt înseamnă de fapt ignorarea premiselor intuiţioniste ale logicii sau, altfel spus, imposibilitatea construcţiei unei logici a matematicii intuiţioniste.

Obiectul analizei semantice îl constituie deci „numele elementelor terminologiei matematice". Deoarece aici nu este vorba de matematica intuiţionistă, acest lucru poate fi exemplificat astfel : „$1 + 1 = 2$" este o *relaţie matematică* (intuiţionistic ar fi expresia unei construcţii matematice mentale), *numele* ei este „relaţia de egalitate dintre «$1 + 1$» şi «2»" (intuiţionistic ar fi vorba despre acelaşi lucru exprimat cu alte semne), care este un *element al termino-*

[202] E. W. Beth, *Semantical considerations on intuitionistic mathematics*, Indagationes Mathematicae, IX, 1947, p. 572.

logiei matematice; *numele* acestui „element al terminologiei matematice" este o „constantă propozițională", dacă se lucrează în calculul cu propoziții, sau pur și simplu o „propoziție". Ceea ce interesează aici nu mai sînt relațiile dintre „relații matematice", ci relațiile dintre „propoziții", deci relațiile logice.

Dacă se merge pe linie intuiționistă, atunci relațiile logice reprezintă *generalizarea* relațiilor matematice sau generalizarea relațiilor dintre entitățile matematice și expresiile lor lingvistice, cum era cazul formulei

(2) $((\alpha =_{Df} 1 + 2) \wedge (\beta =_{Df} 2 + 1)) \supset (\alpha = \beta)$,

generalizată prin

(3) $(a \wedge b) \supset c$.

Intuiționistic deci se știe ce poate să reprezinte (3) și nu mai este necesară nici o *altă* interpretare a formulei. Formalistic însă *nu este exclusă posibilitatea* unor *alte* interpretări, de exemplu, cea dată de Lukasiewicz, după care (3) ar fi forma generală a silogismului categoric, în care „$a \wedge b$" reprezintă premisele, iar „c" concluzia, lucru imposibil de admis din perspectiva intuiționistă în care variabilele stau numai pentru constante care exprimă construcții matematice.

Beth pornește de la formule de tipul (3) și se întreabă care este semnificația lor, independent de modul în care au fost obținute. Problema este deci aceea de a construi un model semantic al unor astfel de formule. El caută de asemenea „să se îndepărteze de obiecțiile, care din punct de vedere intuiționist pot fi ridicate contra legilor logice generale"[203] prin aplicarea deducției naturale. În felul acesta, consideră Beth, este evitată formularea legilor logice, ceea ce înseamnă că ele sînt scoase din discuție. Într-adevăr, utilizarea schemelor de inferență nu presupune *a priori* valabilitatea legilor logice. Legea terțului exclus apare aici ca o simplă formulă, care nu este însă valabilă. Aceasta înseamnă că sistemul lui Beth Σ_{Bt} este un model al sistemului Σ_{Hy} și deci un Σ_{FN}.

Σ_{Bt} conține o serie de figuri de derivare[204], cu ajutorul cărora pot fi demonstrate à la Gentzen formulele în discuție. Demonstrațiile apar în forma unor „tablouri semantice" tot atît de complicate ca

[203] *Ibidem*, p. 575.

[204] *Cf.* E. W. Beth, *Construction sémantique de la logique intuitioniste*, Colloques internationaux du C.N.R.S., LXX, Paris, 1958, p. 80.

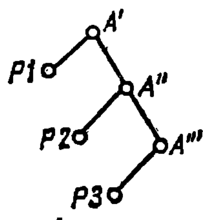
şi cele ale lui Gentzen. Dar, în felul acesta, pot fi demonstrate şi formule care nu sînt valabile din punct de vedere intuiţionist. Problema era aceea de a găsi o metodă prin care să poată fi evitate, pe cale semantică nu prin restricţii demonstrative, formulele admise clasic, dar nedemonstrabile în Σ_{Hy}. Metoda lui Beth constă în aplicarea aşa-numitelor „modele semantice intuiţioniste". Se înţelege că nu este exclusă posibilitatea de a introduce restricţii sau „versiuni" intuiţioniste ale tablourilor semantice, [205] dar acestea ar coincide în esenţă cu restricţiile à la Gentzen privind *tertium non datur* şi *duplex negatio*.

Modelele semantice intuiţioniste sînt în realitate nişte scheme grafice numite şi „arbori", care ilustrează intuitiv proprietatea unui tablou semantic „de a fi închis" sau „de a rămîne deschis". Dacă este vorba de o formulă de tipul ($A \rightarrow B$), atunci, dacă presupunem că A este adevărat ajungem la trei situaţii : (1) B este adevărat şi atunci ($A \rightarrow B$) este validă (tautologie) ; (2) B este fals şi atunci ($A \rightarrow B$) nu este o tautologie şi (3) nu se poate şti dacă B este adevărat sau fals şi atunci ($A \rightarrow B$) este respinsă din punct de vedere intuiţionist. În cazurile (1) şi (2) tablourile semantice sînt „închise", adică se ajunge la o decizie, în cazul (3) tabloul rămîne „deschis" ; nu se poate spune nici că formula este validă, nici că nu este validă.

Un model semantic intuiţionist este un „arbore" T care poate fi descompus într-un număr *finit* de „subarbori" $T_{p1}, \ldots, T_{pn}$ astfel încît o formulă autonomă A să fie legată de fiecare p_i.

De exemplu arborele (T_1), care are trei subarbori T_{p_1}, T_{p_2} şi T_{p3} este un model al formulei A, căci A este legată de T_{p1}, T_{p2}, T_{p3}, ca în graficul următor :

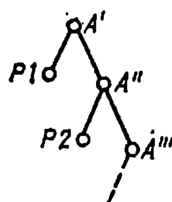
(T_1)



[205] *Cf. Ibidem*, p. 79.

în timp ce (T_2) este un „contramodel" al formulei A, deoarece A este legată numai de T_{p1} și T_{p2}, ca în graficul următor

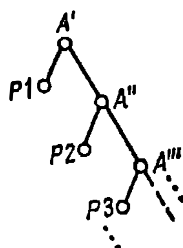
(T_2)



în care lui A''' nu-i mai corespunde nici un p.

T_1 ilustrează o formulă validă, T_2 o formulă care nu este validă. Față de acestea, arborele (T_3), care nu are un număr finit de subarbori, ilustrează faptul că formula A este respinsă intuiționistic, deoarece nu se dovedește nici validă, nici non validă.

(T_3)



Se înțelege că acestea sînt grafice simple. În realitate există ramificații ale subarborilor și ramificații ale acestor ramificații ș.a.m.d. O expunere simplă și concisă a acestei metode se găsește la A. Mostowski [206], care a utilizat la rîndul său această metodă pentru a demonstra nedecidabilitatea în calculul intuiționist al predicatelor[207].

Dacă este vorba de formula [208]

(51) $$(\forall x)(A \vee B(x)) \rightarrow (A \vee (\forall x)B(x)),$$

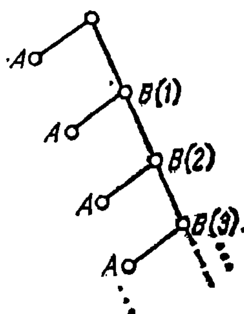
[206] A. Mostowski, *Various interpretation of the intuitionistic logic*, Acta Philosophica Fenica, XVII, 1965, p. 82 sq.

[207] *Cf.* A. Mostowski, *Proofs of non-decidability in intuitionistic functional calculus*, Journal of Symbolic logic, 13, 1948.

[208] *Vide* discuția detaliată în E. W. Beth, *The foundations of mathematics*, Amsterdam, 1965, p. 444 sq.

atunci prin intermediul graficului

(T_{51}) $(\forall x)(A \vee B(x))$



devine evident faptul că nu se poate decide dacă $(\forall x)(A \vee B(x))$ este validă sau nu şi deci nu se poate decide nici dacă (51) este validă sau nu. Aici este vorba de acel tip de nedecidabilitate care presupune efectuarea unui număr infinit de operaţii.

Deşi porneşte de la matematica intuiţionistă, Beth nu reuşeşte să „construiască" o logică a acestei matematici. Cauza o constituie faptul că ignoră ***stadiul al treilea*** al dezvoltării matematicilor şi anume „paralelismul logico-matematic". Aceasta înseamnă că formulele logice nu mai sînt obţinute în calitate de expresii ale operaţiilor matematice. Ele nu mai au semnificaţie matematică. Semnificaţia pe care le-o atribuie Beth (arborescentă) este un simplu joc formalistic, care nu prezintă nici un interes din punct de vedere intuiţionist. Dealtfel, nici Heyting n-a reuşit să găsească un temei intuiţionist justificărilor semantice ale formulelor logice. Într-adevăr, admiterea graficelor presupune existenţa a ***trei*** tipuri de modele : ***două*** (model şi contramodel) cu număr finit de subarbori şi ***unul*** cu număr infinit ceea ce l-a determinat pe Heyting să remarce : „Îmi pare că Domnul Beth introduce o valoare logică intermediară alături de adevăr şi fals, interpretare care nu corespunde logicii intuiţioniste" [209]. Cele trei tipuri de modele sugerează deci trei valori diferite ale formulelor logice.

[209] *Vide* intervenţia lui A. Heyting la comunicarea lui E. W. Beth, *Colloques internationaux du C.N.R.S.*, LXX, p. 83.

Se poate conchide că Σ_{Bt} constituie un model semantic *trivalent* al sistemului Σ_{Hy}, după cum Σ_{Dn} constituia un model bivalent. S-ar putea considera că Σ_{Bt} reprezintă o perfecționare a sistemului Σ_{Dn}, căci în ultimul formula $(p \vee \sim p)$ de exemplu se dovedea pur și simplu nedeductibilă, alături de celelalte formule nedeductibile (false sau consistente din punct de vedere clasic), pe cînd în Σ_{Bt} ea ocupă un loc aparte, respectiv *între* formulele deductibile și nedeductibile. Gentzen însuși observase, dealtfel, faptul că terțul exclus ocupă „un loc excepțional" [210]. Pentru a fi admis în Σ_{Dn}, el trebuie considerat drept „formulă inițială a derivației", drept „formulă fundamentală" sau „axiomă", ceea ce ar însemna admiterea în Σ_{Dn} a unei formule de altă natură decît cele ipotetice, spre deosebire de *negatio duplex* care poate fi admisă drept figură de derivare (DD).

Sistemul Σ_{Bt} reproduce, prin urmare, pe plan pur formal, la nivelul unor jocuri arbitrare, trăsătura logică fundamentală a teoriei intuiționiste și anume *suspectarea legii terțului exclus*.

e) *Sistemele pozitive ale lui Gr. C. Moisil*

Gr. C. Moisil, cunoscut încă din 1938 pentru contribuții speciale privind interpretarea intuiționistă a silogismelor ipotetice [211], a construit o serie de sisteme formalist-neointuiționiste și a precizat raporturile dintre acestea, ajungînd pe această cale la construcția unei logici, din care poate fi derivat orice sistem de acest tip. El pornește de la așa-numita „logică pozitivă" a lui Hilbert și Bernays. Sistemul pe care îl prezintă conține însă și functorul disjunctiv, care nu mai apare la Hilbert și Bernays, cel puțin în ultima ediție [212]. În aceasta sînt prezentate două sisteme pozitive: unul care conține numai implicația și altul care conține, ca la Griss, implicația și con-

[210] G. Gentzen, *op. cit.*, p. 28.

[211] *Cf.* Gr. C. Moisil, *Sur le syllogisme hypothétique dans la logique intuitionniste*, Journ. de math. pures et appl., 17, 1938. Unele rezultate obținute în această lucrare au fost menționate de către A. Heyting în *Les fondements des mathematiques*, p. 21.

[212] *Cf.* D. Hilbert und P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, II, Springer-Verlag, 1970, pp. 438—455.

juncția. Moisil pornește de la un sistem care conține următoarele axiome :

(1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$,

(2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$,

(3) $(A \,\&\, B) \rightarrow A$,

(4) $(A \,\&\, B) \rightarrow B$,

(5) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \,\&\, C))$,

(6) $A \rightarrow (A \vee B)$,

(7) $B \rightarrow (A \vee B)$,

(8) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B) \rightarrow C))$,

și regula *modus ponens*, respectiv

$$\frac{A,\ A \rightarrow B}{B}$$

El compară acest sistem (Σ_{Hp}) cu cele intuiționiste și constată că prin adăugarea negației și a unei axiome care să exprime principiul contradicției se obțin sistemele Σ_K și Σ_J. Dacă la acestea se adaugă principiul implicației adevărului prin fals se obține Σ_{Gl} și Σ_{Hy}. Dacă ultimului i se adaugă o axiomă care să exprime principiul dublei negații sau al terțului exclus se obține Σ_C. În plus, Moisil constată că adăugarea unor functori modali la Σ_C duce la sistemul lui Lewis, iar prin adăugarea functorului „excepție", cu axiomele corespunzătoare, se obține o logică modală care poate fi restrînsă la logică trivalentă a lui Lukasiewicz [213].

Cu toate că din Σ_{Hp} se pot obține sistemele enumerate, Moisil consideră că Σ_{Hp} nu este destul de general, căci nu poate servi drept calcul propozițional pentru sisteme, ca cel al lui Birkhoff și von Neumann, în care nu mai sînt valabile anumite legi distributive. Un astfel de calcul ar trebui să fie o *logică strict pozitivă*[214] (Σ_{Msp}). Originalitatea ei constă în faptul că nu conține decît doi functori : conjuncția și disjuncția. Aceasta înseamnă că trebuie să se renunțe la metoda axiomatică în favoarea unei deducții naturale a la Gentzen, în care

[213] *Cf.* Gr. C. Moisil, *Sur la logique positive*, Acta logica, 1, 1958.

[214] *Cf.* Gr. C. Moisil, *Sur la logique strictement positive*, Anal. Univ. Al. I. Cuza, XI, 15 (1965).

nu mai apar axiome, ci ipoteze. Dacă la Σ_{Msp} se adaugă legile distributivității conjuncției față de disjuncție, respectiv

(a) $(A \,\&\, (B \vee C)) = ((A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C))$,

(b) $(A \vee (B \,\&\, C)) = ((A \vee B) \,\&\, (A \vee C))$,

atunci se obține o *logică strict pozitivă distributivă*[215] (Σ_{Mspd}). Pe baza sistemului Σ_{Msp} poate fi construită o *logică strict simetrică*[216] (Σ_{Mss}). Dacă la aceasta se mai adaugă și principiul terțului exclus, atunci se obține o *logică a teoriei quantice*, deci un Σ_{Form}.

Interesant este faptul că Moisil construiește o logică și mai strictă decît Σ_{Msp}. Aceasta este *logica elementară* (Σ_{Me}). Deși în seria sistemelor cu care operează Moisil nu apare nici unul pur intuiționist (a la Griss), este evident că un astfel de sistem poate fi obținut cu ușurință, dacă se renunță la axiomele (6) — (8) din Σ_{Hp}, cum procedează dealtfel Hilbert și Bernays[217].

Construcția unui sistem care să nu mai conțină implicația determină renunțarea la metoda axiomatică, care se dovedește astfel un mijloc formalist *mai slab* decît deducția naturală. Logica intuiționistă, din acest punct de vedere, se dovedește a fi mai puțin strictă decît alte sisteme. În ciuda adversității pentru sisteme axiomatice, intuiționiștii nu au respins metoda axiomatică, pe cînd formaliștii, ducînd la extrem posibilitatea de a introduce restricții formale (eliminări de axiome, de functori etc.) sînt nevoiți să abandoneze la un anumit nivel calculul axiomatic în favoarea celui natural.

Rezultatele obținute de Gr. C. Moisil sînt deosebit de importante pentru surprinderea caracterului formalist al *tuturor* sistemelor Σ_{FN}. Dacă se face abstracție de semnificația specială a variabilelor și a operațiilor intuiționiste, ca în Σ_{FN}, atunci sistemele respective pot fi încadrate fără nici o dificultate în *ierarhia* sistemelor formaliste. Aici ele nu mai ocupă un loc aparte. Există sisteme *supra-* și *subordonate* sistemelor Σ_{FN}. Acestea din urmă pot fi obținute în ambele sensuri, fie pornind de la cele supraordonate, fie de la cele subordonate.

În contextul ierarhiei sistemelor formaliste se pierd însă și ultimele caracteristici formal-intuiționiste ale sistemelor Σ_{FN}.

[215] Gr. C. Moisil, *Încercări vechi și noi de logică neclasică*, București, 1965, p. 385.

[216] Gr. C. Moisil, *Essais sur les logiques non chrysippiennes*, București, 1972, p. 534—539.

[217] *Cf.* Hilbert und Bernays, *op. cit.*, pp. 445—455.

Într-adevăr, acestea mai puteau fi numite „intuiționiste" în măsura în care corespundeau tezei (VI). Admiterea ierarhizării însă şi a modalității *pur* formaliste, *cu totul arbitrară*, de obţinere a sistemelor unul din celălalt, îndreptăţirea *tuturor* acestor sisteme nu mai corespunde tezei (VI). Respectarea tezei (VI) presupune *infirmarea* oricărui sistem în care *tertium non datur* sau *negatio duplex* sînt universal valabile.

La nivelul ierarhizării formaliste a sistemelor se pierde în mod firesc şi importanţa celor două probleme esenţiale ale sistemelor Σ_{FN}, respectiv problema negaţiei şi problema principiilor logice. Introducerea sau excluderea lor nu diferă cu nimic de introducerea sau excluderea altor operaţii logice sau altor expresii tautologice.

Dar, ţinînd cont de faptul că pierderea determinaţiilor de conţinut ale sistemelor Σ_{FN}, în cazul ierarhizării amintite, nu înseamnă anularea lor în genere, că însăşi ierarhizarea, deducţia arbitrară a sistemelor nu constituie decît forma *cea mai abstractă* a teoriei sistemelor, în realitate operîndu-se cu sisteme determinate, se poate conchide că şi aici se ajunge la un rezultat pozitiv pentru logica intuiţionistă. Acesta poate fi formulat astfel: admiterea sistemelor formalist-neointuiţioniste, care reproduc la un nivel foarte abstract notele dialectice ale logicii intuiţioniste, în cadrul ierarhiei formaliste din teoria generală a sistemelor, înseamnă de fapt recunoaşterea statutului ferm, formalistic al logicii intuiţioniste în contextul logicii moderne.

În plus, trebuie admis şi faptul că însăşi această ierarhizare a fost prilejuită de existenţa şi de diversitatea sistemelor Σ_{FN} şi, în consecinţă, că *ierarhizarea sistemelor formale ea însăşi poartă pecetea unui demers dialectic.*

ÎNCHEIERE

Filozofia neointuiționistă în genere și matematica intuiționistă în special ilustrează, în contextul gîndirii teoretice contemporane, tendința științelor moderne, mai mult sau mai puțin matematizate, către o *concepție dialectică*. Această tendință este de cele mai multe ori spontană. Punctul ei de plecare îl constituie dificultățile serioase, imposibil de soluționat în contextul unei gîndiri mecaniciste, pe care le provoacă reinterpretarea Obiectului și a Metodei științifice, ambele în plină dezvoltare.

Caracteristică pentru dezvoltarea fizicii moderne, de exemplu, a fost descoperirea unor noi fenomene, îmbogățirea considerabilă a Obiectului. Problemele filozofice ale fizicii moderne și îndeosebi semnificația lor dialectică sînt bine cunoscute Pentru matematici a fost însă caracteristică dezvoltarea Metodei, Obiectul fiind adesea trecut cu vederea. Și problemele filozofice ale matematicilor moderne sînt în genere cunoscute însă semnificația lor dialectică este, de regulă, ignorată.

Particularitățile fizicii moderne au dezvăluit aspecte ale dialecticii în context ontologic, context propriu dealtfel și dialecticii clasice, posthegeliene. Particularitățile matematicilor au determinat apariția unei concepții dialectice într-un domeniu în care se părea că aceasta nu-și are locul. Într-adevăr, dezvoltarea logicii matematice, simbolice s-a realizat, dacă nu în opoziție, cel puțin cu totul *independent* de orice *presupoziție* dialectică.

Rezultă totuși, în urma unei cercetări amănunțite, ca cea de față, faptul că dialectica a pătruns și aici, ce-i drept *nu direct* și într-o *formă specifică* în care este greu de recunoscut la prima vedere. Consecințele ei îndepărtate, pe planul cu totul abstract al sistemelor formaliste, pot fi recunoscute numai pe baza reproduceri întregului proces care le-au dat naștere.

Punctul de plecare îl constituie *matematica intuiționistă*. Încercările filozofilor neointuiționiști de a elabora o teorie ontologică, care

să preceadă ceea ce ei numesc *activitatea* matematică, sînt pătrunse de un oarecare spirit dialectic, dar pe un fond idealist-subiectiv. Brouwer de exemplu încearcă să pună la baza ontologiei conştiinţa individuală, mai mult chiar *propria* lui conştiinţă. Aceasta s-ar găsi iniţial într-o stare letargică, într-un fel de *In sine*, în subiectivitatea pură, din care nu poate ieşi decît prin propria ei intervenţie. Fenomenul iniţial al autodepăşirii de sine a conştiinţei individuale este, după Brouwer, *senzaţia*. Ivirea senzaţiei este primul pas către *obiectivare*, senzaţia transformîndu-se ea însăşi în *obiect*, în momentul în care mintea revine asupra ei. Această „revenire" coincide cu transformarea conştiinţei, iniţial nediferenţiată, în subiect *(ego)* şi obiect *(alter ego)*. G.F.C. Griss porneşte de la *unitatea* subiect-obiect, considerînd imposibilă existenţa independentă a unuia dintre cei doi termeni, termenul fundamental fiind şi în această variantă subiectul. Ce-i drept, Griss încearcă să evite *solipsismul*, dar nu prin recunoaşterea faptului că ar exista *realmente* şi alte conştiinţe, ci prin postularea unui fel de suflet *universal* pe care îl numeşte chiar *atman*. Griss, ca şi Brouwer de altfel, vorbeşte foarte des în termenii filozofiei indiene. Dar aceste concepţii, pur speculative nu au fost adoptate nici măcar de discipolii direcţi, cum a fost Heyting de exemplu, ai acestor matematicieni-filozofi şi au fost considerate partea cea mai vulnerabilă a filozofiei neointuiţioniste [218].

Cu toate acestea, la nivelul „mişcării iraţionale a conştiinţei", dialectica intuiţionistă are particularităţile obişnuite domeniului ontic. Consideraţiile privind mecanismul, „autoînstrăinării conştiinţei" şi a „opoziţiei sale cu sine" se bazează evident pe idei care contravin principiilor clasice ale *identităţii* şi *noncontradicţiei*. În domeniul „raţionalităţii", identificată cu activitatea matematică, al cărei punct de plecare îl constituie „intuiţia primară" identitatea şi noncontradicţia îşi redobîndesc *caracterul absolut*.

Dialectica matematicii intuiţioniste are deci particularităţi specifice, *neontice*. „Mediul devenirii libere", în ciuda atributelor sale dialectice nu încalcă identitatea şi noncontradicţia, ci numai *principiul terţului exclus* şi al *dublei negaţii*, ambele avînd valoare *metodologică*, fiind utilizate de regulă ca *mijloace demonstrative*.

Ce-i drept, la intuiţionişti nu apare explicit distincţia dintre cele *două tipuri* de dialectică dar este evident că în domeniul ontic

[218] Într-o viitoare lucrare, consacrată în mod special *filozofiei* neointuiţioniste, vom expune pe larg aceste probleme (*vide* şi studiile noastre, citate la începutul acestei lucrări).

consecvența dialectică nu vizează direct principiul terțului exclus — dovadă și discuțiile din fizica modernă, care privesc direct identitatea și noncontradicția. Pe de altă parte, lezarea identității sau a noncontradicției ar coincide cu desființarea matematicilor. Dar aceasta nu înseamnă că nu poate să existe și o „dialectică a matematicii", iar faptul că lezează principiul terțului exclus și trebuie să-l lezeze este o consecință a „devenirii libere" = un concept întru totul dialectic.

Surprinderea principalelor *teze intuiționiste*, reduse în această lucrare la șapte, a avut menirea de a crea o ambianță dialectică *complexă*, un mediu dialectic în cadrul căruia *relativizarea* legii terțului exclus să nu mai apară drept o simplă restricție *arbitrară* și să coexiste în același timp cu *absolutizarea* noncontradicției (tezele IV și V).

Formalizarea tezelor intuiționiste a dovedit faptul că încercările cunoscute n-au respectat această ambianță; s-au bazat numai pe *anumite* teze, care, rupte din contextul lor, și-au pierdut semnificația originară. Din această cauză, sistemele obținute pot duce la consecințe *contrare* doctrinei intuiționiste. De aici a rezultat necesitatea elaborării prealabile a unei *teorii logice intuitive* a matematicii intuiționiste, a cărei fundamentare să rezide în respectarea strictă a *tuturor* tezelor intuiționiste.

Am încercat să demonstrăm că elaborarea unei astfel de teorii intuitive este posibilă, că Brouwer însuși a trasat liniile directoare ale unei astfel de teorii, urmărind la fiecare nivel de abstractizare consecințele punctului de plecare intuiționist.

Surprinderea deosebirii dintre *asertare* și *atestare*, esențială în acest context, ne-a permis, după precizarea semnificației intuiționiste a constantelor și a variabilelor, rezolvarea celor mai dificile probleme ale logicii intuiționiste, legate de interpretarea *negației* și a *operațiilor logice* în genere. Pe baza aceleiași distincții a fost posibilă *justificarea* și *încadrarea* unor doctrine, în aparență opuse, în *aceeași* teorie intuitivă, drept cazuri particulare. Firul director care a fost urmărit pas cu pas l-a constituit respectarea cu strictețe a *paralelismului matematico-lingvistic*.

Teoria intuitivă expusă aici nu este completă. Ea poate fi dezvoltată, deosebit de interesante fiind restricțiile cu privire la raționamente și formule perfect valabile, dar fără semnificație intuiționistă. Întreaga teorie, în genere, oferă un tablou cu totul original față

de cel obişnuit în logica matematică. În ciuda faptului că pentru matematicianul intuiţionist nu prezintă un interes special, teoria intuitivă oferă logicianului un teren de investigaţie deosebit de rodnic.

Teoria intuiţionistă a sistemelor formale, după expunerea prealabilă a teoriei intuitive, îşi dobîndeşte noi dimensiuni, în conformitate cu teza (VII). Noi am prezentat sumar principalele consecințe ale interpretării sistemului Σ_{Hy}, deosebit de rodnice din punct de vedere formalist și în plină dezvoltare în ultimii ani, ca și sistemele intuiționiste diferite de Σ_{Hy}, care îşi găsesc însă, față de teoria intuitivă, un loc bine determinat în contextul teoriei intuiționiste a sistemelor formale. Demonstrația lui Gödel în special pune într-o cu totul altă lumină raportul dintre sistemele formale intuiționiste, dovedind faptul că izomorfismul dintre acestea și teoria intuitivă este numai *parţial*. Sisteme, ca Σ_{Hy}, care corespund extensiv în mai mare măsură teoriei intuitive, se dovedesc necorespunzătoare comprehensiv, ducînd la încălcarea tezei (V). Se constată deci, la nivelul sistemelor formale, o *sărăcire* considerabilă a teoriei intuitive, dar totodată posibilitatea obținerii unor sisteme logice *perfecte*.

Ceea ce prezintă un deosebit interes, din punct de vedere dialectic, este faptul că respectarea riguroasă a *tuturor* legilor logice, în contextul sistemelor formaliste obişnuite, deci respectarea cu stricteţe şi a legii terţului exclus şi a dublei negaţii, are drept consecință, în conformitate cu demonstrația lui Gödel, *încălcarea* principiului noncontradicției (obţinerea paradoxelor), în timp ce excluderea totală a celor două principii este singura garanție a *respectării absolute* a noncontradicției.

În contextul *formalismului neointuiţionist*, care este prezentat aici numai pe coordonate logice, făcîndu-se abstracţie de scopul său formalist = fundamentarea logică a matematicii intuiţioniste, deci de implicaţiile sale pur matematice, la cel mai înalt nivel de abstractizare, răzbate totuşi o parte dintre caracteristicile dialecticii matematice. Problema *negaţiei* şi a *principiilor logice* nu pot fi trecute cu vederea nici la acest nivel. Raportul dintre cele două domenii ale dialecticii ia acum forma raportului dintre cele două tipuri de legi logice. Dar acest raport se realizează prin intermediul negației.

Se ajunge la o situaţie în aparenţă curioasă. Respectarea cu stricteţe a tezelor intuiţioniste duce pe planul abstracţiei pure la eliminarea negaţiei şi excluderea totală a legii terţului exclus şi a dublei negaţii. Aceste eliminări sînt reflexe ale dialecticii matematice, dar au consecinţe formale aparent nedialectice, respectiv *lipsa de*

efectivitate pe care o aduce cu sine respingerea negației și *eliminarea totală a contradicției*. În schimb, respectarea rigidă a principiilor logice, reflex al unei poziții nedialectice în matematici și în ontologie în genere oferă efectivitate, prin menținerea negației, și posibilitatea contradicției. Ceea ce trebuie menționat, înainte de toate, este faptul că aici „contradicția" nu mai are sensul pozitiv ontologic. Ceea ce este contradictoriu, este, pe plan logic, inadmisibil. Aceasta înseamnă că lipsa de contradicție, în context logic formal, nu este o notă nedialectică. Problema în discuție rămîne efectivitatea.

În contextul logicii intuiționiste ar exista două variante, în cadrul cărora nu s-ar mai pune problema efectivității. Una ar fi varianta semiintuiționistă a lui Heyting, deci admiterea unui $\Sigma_{F/I}$, care să conțină negația, *să fie efectiv* și să elimine prin restricții axiomatice legea terțului exclus și a dublei negații, asigurîndu-și notele dialectice intuiționiste, dar suferind ca orice sistem formalist obișnuit de pericolul paradoxelor. O altă variantă este aceea a lui Griss, deci admiterea unui Σ_{Int}, fără negație, deci a unui *sistem formal neefectiv*, lipsit de pericolul oricărei contradicții. Ultima variantă nu poate fi admisă însă decît în cadrul strict delimitat al celor șapte teze intuiționiste. Într-adevăr, numai admițînd faptul că matematica pură, singura asupra căreia este admisibil să poarte logica și sistemele ei (în accepție intuiționistă), este cu totul *independentă* de logică, fiind o *activitate* și *nu o teorie*, se poate admite nu numai *posibilitatea* unei logici neefective, ci și *necesitatea* ei.

Din punct de vedere general-filozofic acesta este punctul central al neointuiționismului, *incompatibil* cu oricare dintre variantele pozitivismului logic. Neopozitiviștii consideră că este posibilă *construcția logică a întregii lumi (der logische Aufbau der Welt)*, mai mult se consideră că ceea ce nu poate fi construit pe cale logică (este vorba de logica matematică) nici nu poate să existe. Toate acestea denotă în mod evident o efectivitate logică *exagerată*. Neointuiționiștii dimpotrivă, consideră că logica matematică nu trebuie să aibă *nici o efectivitate*, nici măcar în matematici. Teoriile neopozitiviste, bazate pe această efectivitate exagerată, au fost studiate pe larg în literatura de specialitate; noi am încercat să conturăm premisele punctului de vedere opus. O concepție corectă trebuie să fie *intermediară*, dar trebuie, în mod evident, să pornească de la depășirea ambelor extreme.

Dificultățile semnalate mai sus și-au găsit o soluție și în *teoria generală a sistemelor*, în cadrul *ierarhizării* acestora. Este vorba de faptul că elaborarea, din perspective mai mult sau mai puțin intui-

ţioniste, a unei suite de sisteme formale dovedeşte că nici unul dintre acestea nu poate fi considerat absolut, că fiecare dintre ele are o valoare *relativă*. Logica simbolică nu mai poate fi identificată astăzi cu *un anumit* sistem formal, indiferent de efectivitatea sau perfecţiunea lui. Încadrarea sistemelor Σ_{FN} în teoria generală a sistemelor formale, recunoaşterea statutului lor formalist, dovedeşte posibilităţile logicii simbolice moderne de a îmbrăţişa *dialecticul*, ce-i drept, nu în totalitatea lui şi într-o formă cu totul specifică înaltului ei grad de abstractizare.

LISTĂ DE SEMNE ŞI PRESCURTĂRI

1. *Notaţia clasico-formalistă*

$\sim$ negaţie
& conjuncţie
$\vee$ disjuncţie
$\rightarrow$ implicaţie
$\Rightarrow$ implicaţie între formule complexe
$\prec$ implicaţie strictă
$\Box$ necesar
$\Diamond$ posibil
$p, q, r, \ldots$ variabile propoziţionale (şi uneori variabile de formule)
$A, B, C, \ldots$ variabile de formule
$x, y, z, \ldots$ variabile individuale
$\exists x$ cuantificator existenţial
$\forall x$ cuantificator universal
$A(x), B(x), C(x), \ldots$ funcţii propoziţionale
N, M mulţimi
$C(0, 1)$ continuul liniar
$\aleph_0$ puterea mulţimilor numărabile
$\aleph_1$ puterea mulţimilor nenumărabile

2. *Notaţia intuiţionistă*

$\neg$ negaţie
$\neg_p$ negaţia unei proprietăţi
$\wedge$ conjuncţie
$\vee$ disjuncţie
$\supset$ implicaţie
$\supset \subset$ echivalenţă
$\vdash$ asertare

⌞$_t$ atestare
⊏ asertare sau atestare (în disjuncție neexclusivă)
Ɛ x cuantificator existențial
Π x cuantificator universal
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ constante matematice propoziționale
$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \ldots$ constante matematice individuale
$a, b, c, \ldots$ variabile intuiționiste
$a_i, b_i, c_i \ldots$ variabile matematice individuale
$\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \ldots$ constante nedecidabile (material)
$P, Q, R, \ldots$ proprietăți
P^0 formulă nedecidabilă (formal)
⊦ ⊦ axiomă
⊦ tautologie
⊣ contradicție
⊥ consistență
distinct

3. *Semne generale*

↠ de la...la
= echivalență; egalitate
$=_{Df}$ egal prin definiție
⋏ adevăr
⋎ fals
≠ diferit
Ø contradicție
Σ sistem axiomatic
Δ demonstrabil
∪ reuniune
∈ apartenență
⊂ inclus în

4. *Prescurtarea sistemelor logice*

Σ_{Br} „sistemul Brouwer" al lui P. Lorenzen; *(vide și* Σ_{La}*)*
Σ_{Bt} sistemul lui Beth
Σ_C sistemul clasic
Σ_{Cb} sistemul clasic al lui Gödel
Σ_D sistemul deducției naturale
Σ_{Dn} sistemul lui D. van Dantzig

$\Sigma_{F/I}$ sisteme semiintuiţioniste
Σ_{fn} sistem fără negaţie
Σ_{FN} sistem formalist neointuiţionist
Σ_{Form} sistem formalist
Σ_{Gl} sistemul lui Glivenko
Σ_{Go} logica lui Gonseth
Σ_{Gr} sistemul lui Griss
Σ_{H} sistemul lui Hilbert
Σ_{Hp} sistemul pozitiv al lui Helbert
Σ_{Hr} sistemul lui Harrop
Σ_{Hy} sistemul lui Heyting
Σ_{Int} sistem intuiţionist
Σ_{J} sistemul lui Johansson
Σ_{Kl} sistemul lui Kleene
Σ_{La} logica afirmativă a lui Lorenzen
Σ_{Le} logica efectivă a lui Lorenzen
Σ_{Li} sistemul intuiţionist al lui Lukasiewicz
Σ_{Ln} logica cu negaţie a lui Lorenzen
Σ_{Lp} sistemul parţial intuiţionist al lui Lukasiewicz
Σ_{Lc} sistemul de implicaţie şi negaţie al lui Lukasiewicz
Σ_{M} sistem de logică modală
Σ_{Me} logica elementară a lui Moisil
Σ_{Msp} logica strict particulară a lui Moisil
Σ_{Mspd} logica strict pozitivă distributivă a lui Moisil
Σ_{O} logica monovalentă a lui Onicescu
Σ_{S4} sistemul lui Kripke
Σ_{Sm} sistemul lui Schmidt
Σ_{T} sistemul lui Troelstra
Σ_{Vr} sistemul lui Vredenduin

ELEMENTS OF INTUITIONIST LOGIC

Summary

The starting point of this work is a brief presentation of the main intuitionist ideas, illustrated by plain examples from the intuitionist mathematics and concentrated in seven theses — essential for the understanding of the intuitionist conception about logic and indispensable for the effective construction of an intuitionist logic. These seven theses are :

I. The pure mathematics is an activity independent from language ;

II. The object of pure mathematics consists of the non-linguistic mathematical constructions ;

III. The object of the mathematical logic consists of the mathematic language which carries, more or less exactly, the mathematical constructions ;

IV. The effective mathematical existence always implies the logical non-contradiction ; but the non-contradiction does not always imply effective mathematical existence ;

V. The practise of a correct mathematics and a corresponding logic prevents the occurrence of paradoxes ;

VI. *Tertium non datur* and *duplex negatio* cannot be universally valid in a correct logic, nor could they be false ;

VII. Axiomatization cannot be acceptd as a method for the construction of mathematical theories, but only as an auxiliary method for the description and systematization of pre-existent theories.

The second chapter (*The Formalizing of the Intuitionist Theses*) details the main attempts to construct an intuitionist logic. It shows that these attempts can be devided in two groups : one group surveys the formalizing of the first theses, and the other follows particularly the formalizing of thesis VI. The attempts in the first group take more on the intuitive line ; the others — on the formal axiomatic line. Special mention is made of A. Heyting's contribution, which tries to work alongside both directions. In spite of that, Heyting's system

has got into deficit. It does not entirely encompass the intuitionist theses, so — like the other axiomatic attempts in this direction — it ends up by becoming a mere formalist system, with no precise interpretation, which does no longer answer the intuitionist exigencies.

The author strives to prove the possibility of contructing an *intuitive* logical theory of the intuitionist mathematics which may befit the seven theses. This intuitive theory must *precede*, according to thesis VII, the evolvement of any formal system of the intuitionist logic, because it is not aimed at the construction of the intuitionist logic, but at the description and systematizing of an intuitive, preexistent, logical theory.

It begins with the Brouwerian theory of the mathematical stages, mainly treading on the construction of the *mathematical-linguistical parallelism.* The concepts of "mathematical construction" are specified (marked $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$...) as well as "the individual constants" (marked α_i, β_i, γ_i...) and "the propositional constants" (marked α, β, γ, ...). The constants are conceived as *shortenings* of the linguistical expressions, which denote either simple mathematical entities, as in the case of the individual constants, or operations with such entities, as in the case of the propositional constants.

As regards the propositional constants, it comes out that there are two ways, one *direct* and the other *indirect*, to obtain the mathematical-linguistical parallelism. The first one starts from the mathematical construction : $(A) \rightarrow (\mathfrak{A}) \rightarrow (\alpha)$; the second, from the propositional constant $(\alpha) \rightarrow (\mathfrak{A}) \rightarrow (A)$. It is by means of the two ways of getting the mathematical-linguistical parallelism that the essential distinction is being introduced between an *asserted* constant $(\llcorner_s)$ and an *attested* one $(\llcorner_t)$. The *asserted* constants are obtained by direct means :

$(A) \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow (\llcorner_s \alpha)$; the *attested* ones, by reverse means : $[(\alpha) \rightarrow (\mathfrak{A}) \rightarrow (A)] \rightarrow (\llcorner_t \alpha)$.

By way of the reverse means of getting the mathematical-linguistical parallelism, the *intuitionist negation* is illustrated. According to Brouwer's, it takes the following form :

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} (\alpha) \rightarrow (\mathfrak{A}) \rightarrow (-) & & (\neg\, \alpha) \\ \downarrow & & \downarrow\uparrow \\ (B) \rightarrow (\mathfrak{B}) & \rightarrow & (\llcorner_s \beta) \end{array}$$

It means that the starting point is a propositional constant (α) which shortens a linguistical expression $(\mathfrak{A})$, with no corresponding

mathematical construction (A), but which entails a construction (B) so that (β) — which shortens its linguistical expression 𝔅, contradicts (α) — marked by (¬ α). Acoording to Heyting's, the negation takes the form :

$$[(\alpha) \rightarrow (\mathfrak{A}) \rightarrow (\emptyset)] \rightarrow (\neg\, \alpha) \qquad (2)$$

in which Ø indicates a hypothetical contradictory construction.

Mention is made of G.F.C. Griss' criticism of form (2) as lacking intuitionist consistency. Griss confines the acquiring of the mathematical-linguistical parallelism to the direct way of assertions, where no negation is liable to occur, under the presumption of the inexistence of contradictory hypothetical constructions (Ø).

The reverse way may also witness undecidable constants (α°, β°, γ°, . . .) which shorten linguistical expressions ; they have no correspondence, à la Brouwer, in either effective mathematical constructions, nor in constructions whose shortened expressions would contradict them ; nor, à la Heyting, in contradictory hypothetical constructions.

Discussions about negation are mentioned. It could be intuitionistically justified on the basis of thesis III which postulates the *admission of linguistical errors*. Under this circumstance, erratic expressions could be obtained even directly. Generally speaking, owing to the fact that the mathematical language is not a sure method to express mathematical constructions, any linguistical expression must be *verified*, no matter the method of acquirement. During the verification process, the negation may appear. Mention is also made of the discussions regarding the undecidable constants and the question of their exclusion, as alien to the context of the mathematical-linguistical parallelism.

Another fundamental problem is connected with the intuitionistic interpretation of the *propositional variables*. Since the "truths", after Brouwer, do not reside with the mathematical language, but with mathematics proper ; and since the assertion, the attesting and the negaton of the expressions could be justified with no help from the values of truth, the intuitionist propositional variables must be interpreted as *generalizations* of the propositional constants, either asserted or attested, when they are marked $\neg a$, $\neg b$, $\neg c$, . . . ; or generalizations of the negated propositional constants, when they are marked $\neg\, a$, $\neg\, b$, $\neg\, c$, ... Other variants are also mentioned, where negation is identified with falseness (Heyting), or excluded

as a negation in general (Griss), or as falseness (Octav Onicescu, *Logique à une seul valeur*, in *Principes de logique et de philosophie mathematique*, Bucarest, 1971). Anyway, no intuitionist propositional variable, irrespective of the variant of its interpretation, could further allow the value shuffles of the formalist propositional variable. If both p and $\sim p$ could be true or false, a and $\neg a$ generalize determined constants; a only generalizes asserted or attested constants (= true in certain variants), while $\neg a$ only generalizes negated constants (= false in certain variants). But all these induce an intuitionist re-interpretation of the *logical operations*, which could no longer be considered as functions of truth.

Details are offered on the intuitionist significances of the logical operations, with the variants and the difficulties that they entail. One paragraph, dedicated to the *general significance of the intuitive theory*, sets in principle the question of some tautologic formulae, derived from the special significance of the propositional variables — other than the usual ones; and the other way round — the lack of significance of the usual tautologies which cannot, though correct, take any place within the frame of the mathematical-linguistical parallelism.

The intuitive theory is completed by two paragraphs concerning the significance of the *predicative forms* and of the quantification. Disputed concepts are introduced, like the one of "property", and one discusses the problem of a special negation ($\neg_p$) which should only affect the property and which should be distinct from the propositional negation ($\neg$). On the basis of these distinctions, the intuitionist restrictions in the logic of the predicates are unfolded.

The intuitionist theory of the formal systems is tackled, this time, in its relationship with the intuitive theory; the formal systems are regarded according to the degree in which they describe and systematize this theory. Heyting's system is the starting point, due to its formalistic characteristics which allow various *interpretations* — quite interesting from the formalist point of view, but with no intuitionist significance. A review is made of the other intuitionist systems, with or without negation.

The intuitionist significance of Gödel's demonstration brings forth the fact that any formal system which is adequate to the intuitive theory of the intuitionist logic must be of the positive type, in order to avoid all possible contradictions and to comply with thesis V. The conclusion is reached, nevertheless, that in this case, the logical perfection of a system, like Griss', brings about a conside-

rable shrinkage of the intuitive theory. Such criteria divide the formal systems into *semi-intuitionist* and *intuitionist.*

The last part of the work *(The Logic of the Neointuitionist Formalism)* is dedicated to the systems bearing no connection with the intuitive theory of the intuitionist logic, hence to the intuitionist theses. Instead, the formalist-neointuitionist systems are connected to the formal intuitionist systems. If these last ones are regarded as partially izomorphous models with the intuitive theory of the intuitionist logic, then the formalist-neointuitionist systems are *models of these models.* In the formalist-neointuitionist systems which are the result of the intuitionists' tendency toward formalism and of the formalists' toward intuitionism, we lose, as a rule, the intuitionist significance of the variables and of the logical operations. Systems like those of Troelstra, Kreisel, Kleene, Schmidt, Lorenzen are rendered. The author also rendered here the tendency of some "intuitionists" who are not only concerned with the contruction of the formalist-neointuitionist systems, but also apply them in a formalistic manner to the building of the intuitionist mathematics — which evidently contradicts the intuitionist theses and which has triggered, as a matter of fact, A. Heyting's opposition itself. It does not mean however, that no valuable results have been obtained, but it does mean that these results have no more connection with intuitionism.

In spite of this situation, the formalist-neointuitionist systems preserve, at the level of the most abstract generality, certain formal particularities of the intuitionist logic. They are linked with the *significance of negation* and the *logical principles.*

The negation can no longer be considered as a simple operator. It characterizes the *quality* of the formal system. Avoidance of the negation could ultimately offer the logical *perfection*, but it brings about, in P. Lorenzen's terminology, the lack of effectivity of the respective system. From the intuitionist point of view, this fact involves no disadvantage, for pure mathematics is independent from any language and requires no logical effectivity. Intuitionism is, from this point of view, entirely opposed to neopositivism which, in its extremist form, tends toward the logical construction of the whole world.

The logical principles, also, regain their formal importance. They could no longer be considered as simple tautologic formulae, alongside with any other. A certain differenciation among them is obvious; one group is made up of the principle of the identity and of

the non-contradiction; the other, of the principle of the excluded third and of the double negation. It is useful to consequently exclude the latter, in order to grant the former (the avoidance of the occurrence of paradoxes).

The *relativizing* of the logical principles is a formal consequence of the *dialectic* particularities of the intuitionist mathematics, which is perpetuated to the level of the formalist systems and having here the semblance of an entirely arbitrary character. Within a general theory of formal systems, the systems called "intuitionists" — in spite of their strict formalistic aspects — determine a grading of the systems (Gr. C. Moisil, *Essais sur les logiques non chrysippiennes*, Bucureşti, 1972), which involves in itself a dialectic note.

No matter the arbitrary, or more or less formalistic form, the intuitionist systems must be known to their utmost degree of abstraction, to their highest logico-mathematical stages and order, to use Brouwer's terminology, and implicitely — consciously or not, deliberately or not, in one form or another — the dialectic particularities of these systems must also be recognized.